Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass für Mengen $A_i, i \in I$ beliebig, die „de Morganschen Regeln"

$$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} \bar{A}_i \quad \text{und} \quad \overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \bar{A}_i$$

gelten.

Aufgabe 2

Seien A_1, A_2, B_1 und B_2 Ereignisse. Zeigen oder widerlegen Sie

a) $(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)$

b) $(A_1 \times A_2) \cup (B_1 \times B_2) = (A_1 \cup B_1) \times (A_2 \cup B_2)$

Aufgabe 3

Seien $A, B, C \subseteq \Omega$. Zeigen Sie die Gültigkeit der Distributivgesetze:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

und

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Aufgabe 4

Für eine Lieferung von drei Motoren wird für jeden Motor untersucht, ob dieser defekt oder nicht defekt ist.

a) Geben Sie den Ergebnisraum Ω an.

b) Die Ereignisse A, B, C und D sind definiert als

A: Mindestens ein Motor ist defekt

B: Höchstens ein Motor ist defekt

C: Motor Nr. 3 ist defekt

D: Genau 2 Motoren sind defekt

Interpretieren Sie folgende Ereignisse:

1. $\bar{A}$
2. $\bar{B}$
3. $A \cap B$
4. $A \cup B$
5. $A \setminus C$
6. $C \setminus B$
7. $B \cup D$
8. $B \cap D$
9. $\bar{A} \cup \bar{B}$

c) Bezeichne nun $M_i,\ i = 1, 2, 3$ das Ereignis „Motor i ist defekt". Formulieren Sie die Ereignisse A und B aus Aufgabe b) über M_1, M_2 und M_3.

Aufgabe 5

Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen. Zeigen Sie, dass der limes superior dieser Folge genau die Menge aller Elemente ist, die 'immer wieder in Folgengliedern A_n enthalten sind' und dass der limes inferior genau die Menge aller Elemente ist, die ab einem Index n_0 in jeder Menge A_n mit $n \geq n_0$ enthalten ist.