Aufgabe 1

Sei $\Omega = \mathbb{R}$ und

$$A_n = \left\{ x \mid \quad (-1)^n \cdot x \quad > \quad (-1)^{n+1} \cdot n^{[(-1)^n]} \right\}$$

Berechnen Sie $\limsup A_n$ und $\liminf A_n$.

Aufgabe 2

Ein Anagramm (von griechisch anagraphein „umschreiben“) ist ein Wort, das aus einem anderen Wort durch Umstellung (Permutation) der einzelnen Buchstaben gebildet wird[1].
Der Universalgelehrte Robert Hooke (1635 - 1705) veröffentlichte sein später nach ihm benanntes Hookesches Gesetz, die Elementargleichung der Elastizitätslehre, zunächst als Anagramm, um im Zweifelsfall beweisen zu können, dass er das Gesetz zum Zeitpunkt der Veröffentlichung des Anagramms schon kannte, ohne den Inhalt des Gesetzes preisgeben zu müssen. Das Hookesche Gesetz lautet in lateinischer Sprache:

Ut tensio sic vis (deutsch: „Wie die Dehnung, so die Kraft“)

was bei einer alphabetischen Sortierung der Buchstaben zum Anagramm

CEIIINOSSSTTUV

führt.

Wie groß ist die Laplacewahrscheinlichkeit dafür, bei einer zufälligen Bildung einer Buchstabenfolge mit 14 Buchstaben, nach alphabetischer Sortierung das obenstehende Anagramm zu erhalten?

Aufgabe 3

Es sei $\Omega = \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R} \mid A \text{ ist abzählbar oder } \bar{A} \text{ ist abzählbar}\}$ eine σ-Algebra über Ω ist.

Aufgabe 4

Sei der Ergebnisraum $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$ gegeben. Welche der folgenden Mengen sind σ-Algebren über Ω?

a) $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c, d, e\}, \Omega\}$

b) $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c, d, e\}, \{a, c, d, e\}, \{b, c, d, e\}, \Omega\}$

[1] `http://de.wikipedia.org/wiki/Anagramm`

Aufgabe 5* (10 Punkte, Abgabe bis 05.11.2015)

Sei die fünfelementige Grundmenge $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ gegeben.

a) Ist das Mengensystem $\mathcal{F} := \{\emptyset, \Omega, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \{\omega_3, \omega_4, \omega_5\}, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_4, \omega_5\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_5\}\}$ eine σ-Algebra über Ω? Begünden Sie Ihre Antwort!

b) Bestimmen Sie die von dem Mengensystem $\mathcal{E} := \{\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \{\omega_4\}\}$ erzeugte σ-Algebra (über $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$).

Aufgabe 6* (10 Punkte, Abgabe bis 05.11.2015)

Sei $\mathcal{F}$ eine σ -Algebra und seien $A_i \in \mathcal{F}$ für $i \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

a) $\emptyset \in \mathcal{F}$

b) $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

c) $\forall i, j \in \mathbb{N} : A_i \backslash A_j \in \mathcal{F}$

d) $\forall i, j \in \mathbb{N} : A_i \triangle A_j \in \mathcal{F}$

* Bitte geben Sie Ihre Lösungen am 05.11.2015 in der Übung ab (alternativ: Einwurf im Briefkasten in der Ludwigstr. 33 bis 05.11.2015, 18.00 Uhr). Die Aufgaben werden korrigiert und in der darauffolgenden Übung zurückgegeben. Das Erreichen von mindestens 50% der Übungspunkte ist Bestandteil der Prüfungsleistung.