Aufgabe 1

Auf dem Messraum $(\mathbb{N}_0, \mathcal{P}(\mathbb{N}_0))$ sei für $p \in (0,1)$ das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_p$ durch

$$\mathbb{P}_p(\{i\}) = p \cdot (1-p)^i \quad \forall\, i \in \mathbb{N}_0$$

definiert.

a) Zeigen Sie, dass es sich bei $\mathbb{P}_p$ tatsächlich um ein Wahrscheinlichkeitsmaß handelt.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer geraden Zahl?
Hinweis: Geometrische Reihe.

Aufgabe 2

Entscheiden und begründen Sie, bei welchen der folgenden Funktionen $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es sich um $\mathcal{B}^n$-$\mathcal{B}$-messbare Funktionen handelt (mit $n = 1$ für die Teilaufgaben a) – c), $n = 2$ für Teilaufgabe d)).

a) $g(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$,

b) $g(x) = xI_{\mathbb{Q}}(x)$, $x \in \mathbb{R}$,

c) $g(x) = \begin{cases} \log(x) & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$

d) $g(x,y) = \max(\{x,y\})$, $\quad x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3

Das Mengensystem $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R} \,|\, A \text{ ist abzählbar oder } \bar{A} \text{ ist abzählbar}\}$ ist eine σ-Algebra über $\mathbb{R}$ (vgl. Blatt 2, Aufgabe 3).
Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar sind.

a) $f(x) = x$.

b) $f(x) = \lfloor x \rfloor$, $x \in \mathbb{R}$.

c) $f(x) = I_{\mathbb{Q}}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4

Sei $\Omega = \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{F}_1$ genau dann, wenn A oder $\bar{A}$ abzählbar ist, und μ das Maß

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & \text{falls } A \text{ abzählbar} \\ 1 & \text{falls } A \text{ nicht abzählbar.} \end{cases}$$

Für $\Omega' := \{0,1\}$ und $\mathcal{F}_2 := \mathcal{P}(\Omega')$ wird die Abbildung $f : \Omega \to \Omega'$ definiert durch

$$f(\omega) := \begin{cases} 0 & \text{falls } \omega \text{ rational} \\ 1 & \text{falls } \omega \text{ irrational.} \end{cases}$$

Man zeige, dass f $\mathcal{F}_1$-$\mathcal{F}_2$-messbar ist und bestimme das Bildmaß μ_f.

Aufgabe 5* (8 Punkte, Abgabe bis 19.11.2015)

Für $c > 0$ sei die Funktion $\mu : \mathbb{N}_0 \to (0, \infty)$ mit

$$\mu(A) := \sum_{n \in A} \frac{c^n}{n!} \exp(-c), \quad A \in \mathbb{N}_0$$

auf dem Messraum $(\mathbb{N}_0, \mathcal{P}(\mathbb{N}_0))$ definiert.

a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{N}, \mathcal{P}, \mu)$ ein Maßraum ist.

b) Handelt es sich bei μ um ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{N}_0, \mathcal{P}(N_0))$?

Aufgabe 6* (12 Punkte, Abgabe bis 19.11.2015)

Wir betrachten den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ und die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|^3$.

a) Bestimmen Sie $f^{-1}(\mathcal{A}_r)$, wobei $\mathcal{A}_r = \{(a, b] :\ a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$.
Hinweis: Unterscheiden Sie 3 Fälle.

b) Ist f $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}$-messbar?

c) Sei λ_f das Bildmaß von λ unter f. Geben Sie $\lambda_f(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}_r$ an.

* Bitte geben Sie Ihre Lösungen am 19.11.2015 in der Übung ab (alternativ: Einwurf im Briefkasten in der Ludwigstr. 33 bis 19.11.2015, 18.00 Uhr). Die Aufgaben werden korrigiert und in der darauffolgenden Übung zurückgegeben. Das Erreichen von mindestens 50% der Übungspunkte ist Bestandteil der Prüfungsleistung.