Wahrscheinlichkeitstheorie und Inferenz I — **Wintersemester 2015/16**
Prof. Dr. Volker Schmid — **Blatt 6**
Clara Happ, Georg Schollmeyer, Michael Kobl — **Besprechung 26.11.2015**

Aufgabe 1

Sei λ wieder das Lebesgue-Maß und $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g_n(x) := (n+1)x^n \mathbb{1}_{[0,1)}(x)$ für $n \in \mathbb{N}$.

a) Bestimmen Sie $\int \lim\limits_{n\to\infty} g_n \, d\lambda$.

b) Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \int g_n \, d\lambda$.

Hinweis: $\lim\limits_{n\to\infty} (n+1)x^n = 0$ für alle $x \in [0,1)$.

Aufgabe 2

Sei μ ein endliches Maß auf dem Messraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ und die Funktionenfolge

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in [n, n+1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von der dominierten Konvergenz, dass der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$ gleich Null sein muss.

Aufgabe 3

Sei die Funktionenfolge

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto n \cdot I_{(0,\frac{1}{n}]}(x)$$

gegeben.

a) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda$.

b) Berechnen Sie $\int \lim\limits_{n\to\infty} f_n \, d\lambda$.

c) Warum ist hier der Satz von der dominierten Konvergenz nicht anwendbar?

Aufgabe 4

Betrachten Sie die Funktion $F(x) = \begin{cases} e^{2x} & x < -1 \\ 1/2(1 + x/e) & -1 \leq x < 1 \\ 1 - e^{-2x} & x \geq 1 \end{cases}$.

Sei $\nu = \lambda_F$ das zu F gehörenden Lebesgue-Stieltjes Maß. Bestimmen Sie eine Dichte f und ein Maß μ derart, dass $\nu = f \odot \mu$ (vergleiche Satz von Radon Nikodym).

Aufgabe 5* (8 Punkte, Abgabe bis 03.12.2015)

Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow (0,1) : x \mapsto \exp(-x)$ gegeben. Sei λ das Lebesgue-Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$ und μ_Z das Zählmaß auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$.

a) Zeigen Sie, dass $f \quad \mathcal{B}(\mathbb{R}^+) - \mathcal{B}((0,1))$-messbar ist.

b) Berechnen Sie das Integral $\int f \, d\lambda$.

c) Zeigen Sie, dass $f \quad \mathcal{P}(\Omega) - \mathcal{B}((0,1))$-messbar ist.

d) Berechnen Sie das Integral $\int f \, d\mu_Z$.
Hinweis: Eine Möglichkeit wäre hier, die Funktion f durch eine einfachere Funktion g, deren Integral einfach zu bestimmen ist, nach unten abzuschätzen.

Aufgabe 6* (12 Punkte, Abgabe bis 03.12.2015)

Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow (0,1) : x \mapsto \exp(-x)$ gegeben. Betrachten Sie nun die σ-Algebra $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{R}^+ \mid A \text{ abzählbar oder } \bar{A} \text{ abzählbar}\}$ der abzählbaren/coabzählbaren Teilmengen von $\mathbb{R}^+$ (vgl. Aufgabe 3, Blatt 2) und die σ-Algebra $\mathcal{A}' = \{A \subseteq (0,1) \mid A \text{ abzählbar oder } \bar{A} \text{ abzählbar}\}$ der abzählbaren/coabzählbaren Teilmengen von $(0,1)$. Weiterhin sei das Maß μ auf $\mathcal{A}$ gegeben durch (vgl. Aufgabe 4, Blatt 4):

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{falls } A \text{ abzählbar} \\ 1 & \text{falls } A \text{ überabzählbar.} \end{cases}$$

a) Ist die Funktion $f \ \mathcal{A} - \mathcal{A}'$ messbar? (Begründen Sie Ihre Antwort.)

b) Ist die Funktion $f \ \mathcal{A} - \mathcal{B}((0,1))$ - messbar? (Begründen Sie Ihre Antwort.)

c) Ist die Funktion $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow (0,1) : x \mapsto \begin{cases} exp(-x) & \text{falls } x \text{ rational} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$\mathcal{A} - \mathcal{B}((0,1))$- messbar? (Begründen Sie Ihre Antwort.)

d) Berechnen Sie das Integral $\int g \, d\mu$.

e) Berechnen Sie das Integral $\int g \, d\lambda$. (Hier ist λ wieder das Lebesgue-Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$. Auf den Nachweis der Messbarkeit von g kann verzichtet werden.)

f) Berechnen Sie das Integral $\int g \, d\mu_Z$. (Hier ist μ_Z wieder das Zählmaß auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$. Auf den Nachweis der Messbarkeit von g kann verzichtet werden.)

* Bitte geben Sie Ihre Lösungen am 03.12.2015 in der Übung ab (alternativ: Einwurf im Briefkasten in der Ludwigstr. 33 bis 03.12.2015, 18.00 Uhr). Die Aufgaben werden korrigiert und in der darauffolgenden Übung zurückgegeben. Das Erreichen von mindestens 50% der Übungspunkte ist Bestandteil der Prüfungsleistung.