Aufgabe 1

Ein Medikament in Tablettenform zeigt unabhängig voneinander zwei Wirkungen: die nicht sofort erkennbare Heilwirkung mit Wahrscheinlichkeit 80%, und die sofort erkennbare Nebenwirkung mit Wahrscheinlichkeit 30%. Durch ein bedauerliches Versehen bei der Herstellung besitzen 1% der Tabletten, äußerlich nicht feststellbar, eine falsche Dosierung und wirken daher nur noch in 20% aller Fälle heilend, rufen aber in 50% aller Anwendungen die Nebenwirkung hervor.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man auf Heilwirkung hoffen, falls:

a) die Nebenwirkung eintritt?

b) die Nebenwirkung ausbleibt?

Aufgabe 2

Ein technisches System besitzt 3 Kontrollleuchten, von denen entweder genau eine oder alle drei auf einmal leuchten. Jede dieser Möglichkeiten tritt mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf.
Bezeichne K_i das Ereignis "Kontrollleuchte i brennt"($i = 1, 2, 3$).

a) Zeigen Sie, dass die Ereignisse K_i paarweise unabhängig sind.

b) Zeigen Sie, dass die Ereignisse K_i insgesamt nicht unabhängig sind.

Aufgabe 3

Sei X eine poissonverteilte Zufallsvariable mit $X \sim \text{Poi}(\lambda)$, d.h. $f_X(x; \lambda) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda},\ x \in \mathbb{N}_0,\ \lambda > 0$.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen

$$Y = \frac{1}{1+X} \text{ und } Z = \frac{X}{1+X}.$$

Aufgabe 4

Die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen X sei gegeben durch (vgl. Blatt 6, Aufgabe 4):

$$F(x) = \begin{cases} \exp(2x) & x < -1, \\ \frac{1}{2}(1 + x\exp(-1)) & -1 \leq x < 1, \\ 1 - \exp(-2x) & x \geq 1. \end{cases}$$

Berechnen Sie $\mathbb{E}(X)$.
Hinweis: Partielle Integration.

Aufgabe 5* (10 Punkte, Abgabe bis 17.12.2015)

Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit Ereignissen $A, B, C \in \mathcal{F}$.

a) Zeigen Sie: Sind die Ereignisse A, B, C unabhängig, so sind $A \cup B$ und C unabhängig.

b) Beweisen oder widerlegen Sie: A und B disjunkt $\Rightarrow$ A und $\bar{B}$ stochastisch unabhängig.

c) Betrachten Sie das Ereignis A: "Die Augenzahl ist gerade" beim einmaligen, fairen Würfelwurf. Geben Sie ein zu A unabhängiges Ereignis $B \in P(\Omega)$ mit $B \notin \{\emptyset, \Omega\}$ an.

---

* Bitte geben Sie Ihre Lösungen am 17.12.2015 in der Übung ab (alternativ: Einwurf im Briefkasten in der Ludwigstr. 33 bis 17.12.2015, 18.00 Uhr). Die Aufgaben werden korrigiert und in der darauffolgenden Übung zurückgegeben. Das Erreichen von mindestens 50% der Übungspunkte ist Bestandteil der Prüfungsleistung.

Aufgabe 6* (10 Punkte, Abgabe bis 17.12.2015)

Sei X eine stetige Zufallsvariable mit Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} 2\exp(-2x) & x \geq 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}$.

b) Berechnen Sie die Varianz von X.

Hinweis: Partielle Integration.

* Bitte geben Sie Ihre Lösungen am 17.12.2015 in der Übung ab (alternativ: Einwurf im Briefkasten in der Ludwigstr. 33 bis 17.12.2015, 18.00 Uhr). Die Aufgaben werden korrigiert und in der darauffolgenden Übung zurückgegeben. Das Erreichen von mindestens 50% der Übungspunkte ist Bestandteil der Prüfungsleistung.