Aufgabe 1

Betrachten Sie die Geometrische Verteilung mit Zähldichte $f(x) = p(1-p)^{x-1}$ für $x \in \mathbb{N}$, gegeben $0 < p < 1$

a) Berechnen Sie die momenterzeugende Funktion M(s) mit Definitionsbereich.

b) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz einer geometrisch verteilten Zufallsvariable unter Verwendung von Satz 9.2.

c) Weisen Sie nach, daß für eine geometrisch verteilte Zufallsvariable die Eigenschaft der Gedächtnislosigkeit gilt.

Aufgabe 2

Berechnen Sie anhand der momenterzeugenden Funktionen die Erwartungswerte und Varianzen folgender Zufallsvariablen:

a) Y ist eine poissonverteilte Zufallsvariable, $Y \sim P(\lambda)$ mit $f_Y(y;\lambda) = \frac{\lambda^y}{y!}e^{-\lambda}$, $y \in \mathbb{N}_0$.

b) Z ist eine exponentialverteilte Zufallsvariable,

Aufgabe 3

Der Skisportverband eines Landes geht davon aus, dass 1% seiner Athleten unerlaubte leistungssteigernde Substanzen einnehmen. Im letzten Jahr mussten sich insgesamt 1000 Sportler je einem Dopingtest unterziehen.

a) Berechnen Sie mit der Markov-Ungleichung eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 15 Dopingtests positiv ausfallen.

b) Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 5, aber weniger als 15 Tests positiv ausfallen, nach unten ab.

c) Vergleichen Sie die Schranken aus a) und b) mit den wahren Werten.

Hinweis: Für eine Zufallsvariable $X \sim \text{Bin}(n,p)$ lässt sich die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq k)$ in `R` mittels `pbinom(k, n, p)` berechnen.