Aufgabe 1

Die zweidimensionale Zufallsvariable (X, Y) sei stetig verteilt mit Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3}x + cy, & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $c = \frac{4}{3}$.

(b) Bestimmen Sie die Randdichte f_X.

(c) Bestimmen Sie $\mathbb{E}(X)$.

(d) Bestimmen Sie $\mathbb{P}(X \leq Y)$.

Aufgabe 2

Sei $\Omega = [0,1]$ mit dem Maßraum $(\Omega, \mathcal{B}|_\Omega, \lambda|_\Omega)$ gegeben. Für eine messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ bezeichne

$$X := \{(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R} \colon 0 \leq t \leq f(x)\}$$

die Fläche zwischen der Funktion f und der x-Achse.

a) Zeigen Sie, dass X eine messbare Menge ist bezüglich der Produkt-σ-Algebra $\mathcal{A} = \mathcal{B}|_\Omega \otimes \mathcal{B}$.
Hinweis: Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$\begin{aligned} \phi_1 \colon \Omega \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (x,t) &\mapsto f(x) - t \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \phi_2 \colon \Omega \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (x,t) &\mapsto -t \end{aligned}$$

$\mathcal{A} - \mathcal{B}$ messbar sind und schreiben Sie X geeignet um.

b) Weisen Sie unter Ausnutzung des Satzes von Fubini nach, dass

$$(\lambda|_\Omega \otimes \lambda)(X) = \int_{[0,1]} f d\lambda.$$

Aufgabe 3

Gegeben sei die auf dem Intervall $(0,1)$ gleichverteilte Zufallsvariable X. Berechnen Sie mit Hilfe des Dichtetransformationssatzes die Dichte der Zufallsvariablen $Y := -\ln\left(\frac{1}{X} - 1\right)$.

Aufgabe 4

Seien X und Y stochastisch unabhängig und exponentialverteilt jeweils mit Parameter λ. Zeigen Sie unter Verwendung der Faltungsformel, dass die Zufallsvariable

$$Z := X - Y = X + (-Y)$$

Laplace-verteilt ist.
Hinweis: Die Dichte der Laplace-Verteilung lautet $f(x) = \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x-\mu|}{\sigma}}$.

Aufgabe 5

Seien $X \sim \text{Bin}(n, p)$ und $Y \sim \text{Bin}(m, p)$ zwei unabhängige binomialverteilte Zufallsvariablen. Bestimmen Sie anhand der momenterzeugenden Funktion(en) die Verteilung von $Z = X + Y$.

Hinweise:
Haben zwei Zufallsvariablen die gleiche momenterzeugende Funktion, so folgen sie derselben Verteilung.

Außerdem gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k.$$

Aufgabe 6* (10 Punkte, Abgabe bis 14.01.2016)

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \alpha - x \cdot \alpha^2 & \text{falls } x \in [0, \frac{1}{\alpha}] \\ \alpha + x \cdot \alpha^2 & \text{falls } x \in [-\frac{1}{\alpha}, 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei $\alpha > 0$ ein fester Parameter sei.

a) Zeigen Sie, dass f die Dichte (bezüglich des Lebesgues-Maßes) eines Wahrscheinlichkeitsmaßes ist.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert einer stetigen Zufallsvariablen mit Dichte f.

c) Berechnen Sie die Varianz einer stetigen Zufallsvariablen mit Dichte f.

d) Berechnen Sie die momenterzeugende Funktion einer stetigen Zufallsvariablen mit Dichte f.

Aufgabe 7* (10 Punkte, Abgabe bis 14.01.2016)

Seien X und Y zwei stochastisch unabghängige Zufallsvariablen, die auf dem Intervall $(0, 1)$ gleichverteilt seien.

a) Berechnen Sie mit Hilfe der Faltungsformel (vgl. Beispiel 10.3) die Dichte und die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen $Z = X + Y$.

b) Berechnen Sie die momenterzeugende Funktion der Zufallsvariablen Z.

c) Berechnen Sie unter Zuhilfenahme der in b) berechneten momenterzeugenden Funktion den Erwartungswert der Zufallsvariablen Z.

* Bitte geben Sie Ihre Lösungen am 14.01.2016 in der Übung ab (alternativ: Einwurf im Briefkasten in der Ludwigstr. 33 bis 14.01.2016, 18.00 Uhr). Die Aufgaben werden korrigiert und in der darauffolgenden Übung zurückgegeben. Das Erreichen von mindestens 50% der Übungspunkte ist Bestandteil der Prüfungsleistung.