Aufgabe 1

Es seien X_1 und X_2 unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Parameter $\lambda > 0$, d.h. $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$ und $X_2 \sim \text{Exp}(\lambda)$.
Bestimmen Sie die Dichte der Zufallsvariablen $R = \dfrac{X_1}{X_1 + X_2}$.

Aufgabe 2

Es seien $X_1, \dots, X_n$ stochastisch unabhängige Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion $F_{X_i}, i = 1, \dots, n$.

a) Stellen Sie die Verteilungsfunktion von $Z_{\max} = \max(X_1, \dots, X_n)$ und $Z_{\min} = \min(X_1, \dots, X_n)$ als Funktion der F_{X_i} dar.

b) Berechnen Sie die Dichte von $Z_{\max}$ unter der Annahme, dass $F_{X_i} = F \;\forall\, i = 1, \dots, n$ und F stetig differenzierbar.

Aufgabe 3

a) Seien X, Y und Z Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \text{Cov}(aX + bY, Z) &= a \,\text{Cov}(X, Z) + b \,\text{Cov}(Y, Z) \\ \text{Cov}(X, aY + bZ) &= a \,\text{Cov}(X, Y) + b \,\text{Cov}(X, Z). \end{aligned}$$

b) Sei X eine n-dimensionale Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass die Kovarianzmatrix von X positiv semidefinit ist.

Aufgabe 4

Seien $X \sim \text{Hyp}(3, 2, 4)$ und $Y \sim \text{Geom}(\frac{2}{3})$ stochastisch unabhängige Zufallsvariablen.

a) Berechnen Sie die Kovarianzmatrix des Zufallsvektors $Z := (X + Y, X - Y)^\top$.

b) Sind $X - Y$ und $X + Y$ unabhängig?