Aufgabe 1

Sei $X = (X_1, \ldots, X_n)$ eine n-dimensionale Zufallsvariable mit Dichte f_X bezüglich λ^n. Sei weiterhin $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre (d.h. invertierbare) Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$ fest.
Zeigen Sie, daß die n-dimensionale Zufallsvariable $Y = AX + b$ die Dichte

$$f_Y(y) = f_X(A^{-1}(y-b))|\det(A)|^{-1}$$

besitzt.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass zwei gemeinsam normalverteilte Zufallsvariablen genau dann unabhängig sind, wenn sie auch unkorreliert sind.

Aufgabe 3

Gegeben seien die stochastisch unabhängigen Variablen X und Y, wobei X standardnormalverteilt sei und Y diskret verteilt sei und ausschließlich die Werte -1 und 1 jeweils mit Wahrscheinlichkeit 0.5 annehme.
Betrachten Sie nun den 2-dimensionalen Zufallsvektor

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ XY \end{pmatrix}$$

a) Wie ist die erste Komponente U dieses Zufallsvektors verteilt?

b) Wie ist die zweite Komponente V dieses Zufallsvektors verteilt?

c) Berechnen Sie die Kovarianzmatrix dieses Zufallsvektors.

d) Ist dieser Zufallsvektor multivariat normalverteilt?
Hinweis: Betrachten Sie dazu die Korrelation und die stochastische Unabhängigkeit beider Komponenten.

Aufgabe 4

Seien $X \sim \text{Exp}(\lambda_X),\ \lambda_X > 0$ und $Y \sim \text{Exp}(\lambda_Y),\ \lambda_Y > 0$ zwei stochastisch unabhängige Zufallsvariablen.

a) Zeigen Sie, dass für $Z := \min\{X, Y\}$ gilt

$$Z \sim \text{Exp}(\lambda_X + \lambda_Y).$$

b) Sei $\lambda_X = \lambda_Y = \lambda$. Zeigen Sie, dass $X + Y \sim \text{Ga}(2, \lambda)$.
Hinweis: Die Dichte einer Gamma-verteilten Zufallsvariable $X \sim \text{Ga}(a, b)$ ist gegeben durch

$$f(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ \frac{b}{\Gamma(a)} (bz)^{a-1} \exp(-bz) & z > 0 \end{cases}$$

Für die Gamma-Funktion gilt außerdem $\Gamma(n) = (n-1)!\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 5* (10 Punkte, Abgabe bis 28.01.2016)

Gegeben seien zwei reelle Zufallsvariablen X, Y mit gemeinsamer Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x^2 - \frac{1}{3}xy + \frac{1}{2}y^2 & x \in [-1,1],\ y \in [0,1], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass für die Randdichte von X gilt

$$f_X(x) = \begin{cases} x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{6} & x \in [-1,1], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) Bestimmen Sie die Randdichte von Y.

c) Sind X und Y unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 6* (10 Punkte, Abgabe bis 28.01.2016)

Sei $X = (X_1, X_2) \sim \mathrm{N}_2(\mathbf{0}, \Sigma)$ mit $\mathbf{0} = (0,0)$ und

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho \in (-1,1).$$

a) Bestimmen Sie eine Matrix A so, dass $AX = (X_1 + X_2, X_1 - X_2)$.

b) Bestimmen Sie die bivariate Verteilung von $(X_1 + X_2, X_1 - X_2)$.

c) Wie lauten die marginalen Verteilungen von $X_1 + X_2$ und $X_1 - X_2$?

* Bitte geben Sie Ihre Lösungen am 28.01.2016 in der Übung ab (alternativ: Einwurf im Briefkasten in der Ludwigstr. 33 bis 28.01.2016, 18.00 Uhr). Die Aufgaben werden korrigiert und in der darauffolgenden Übung zurückgegeben. Das Erreichen von mindestens 50% der Übungspunkte ist Bestandteil der Prüfungsleistung.