Aufgabe 1

Es seien $X_1, \ldots, X_n$ stu mit $X_i \sim \mathrm{U}(0, b)$ mit $b > 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Zeigen Sie, daß

$$\max_{i=1,\ldots,n}(X_i) \xrightarrow{\mathbb{P}} b.$$

Aufgabe 2

Gegeben Sei der Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda|_{[0,1]})$.
Betrachten Sie die Folge von Zufallsvariablen X_n gegeben durch

$$X_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \omega \mapsto n \cdot I_{(0, \frac{1}{n})}(\omega).$$

Untersuchen Sie sowohl unter expliziter Nachprüfung der entsprechenden Definitionen, als auch unter Verwendung der Implikationen zwischen den Konvergenzarten (Satz 12.1.) die folgenden Fragestellungen:

a) Konvergiert X_n fast sicher gegen 0?

b) Konvergiert X_n in Wahrscheinlichkeit gegen 0?

c) Konvergiert X_n in Verteilung gegen 0?

d) Konvergiert X_n im ersten Moment gegen 0?

Aufgabe 3

a) Machen Sie sich klar, dass für r-fach integrierbare Zufallsvariablen $||X||_r = [\mathbb{E}(|X|^r)]^{\frac{1}{r}}$ gilt.

b) Sei $X_n \xrightarrow{r} X, r \geq 1$. Zeigen Sie, daß dann auch $\mathbb{E}(|X_n|^r) \to \mathbb{E}(|X|^r)$ gilt.
Hinweis: Nutzen Sie den Zusammenhang zur Konvergenz in L^p und entsprechende Eigenschaften der L^p Norm aus (siehe Definitionen 12.2./12.3. und Satz 9.10.).

Aufgabe 4

Bei der Lufthansa ist aus Erfahrung bekannt, dass etwa 18% der Fluggäste ihre gebuchte Reise nicht antreten. Um die Auslastung der Flugzeuge möglichst hoch zu halten, werden mehr als die verfügbaren 150 Plätze in einem Airbus A320 verkauft.

a) Berechnen Sie mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Passagier nicht mitgenommen werden kann, wenn 170 Plätze verkauft werden.

b) Wieviele Plätze sollte die Lufthansa maximal verkaufen, wenn die Wahrscheinlichkeit für ein solches Missgeschick kleiner 0.01 sein soll?

Hinweis: Nehmen Sie an, dass die Entscheidungen über das Antreten der Reise zwischen den einzelnen Passagieren unabhängig sind. Desweiteren in `R`: $\Phi(x) =$ `pnorm(x)` und $\Phi^{-1}(x) =$ `qnorm(x)`.