

1 Analyse von Kontingenztafeln: Grundlagen

Aufgabe 1

Gegeben sei eine Poisson-verteilte Zufallsvariable $X \sim Po(\lambda)$.

- (a) Berechnen Sie $E(X)$.
- (b) Berechnen Sie $Var(X)$.

Aufgabe 2

Gegeben sei eine multinomialverteilter Zufallsvektor $\mathbf{X} \sim M(n, \boldsymbol{\pi})$ mit $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_k)^T$.

- (a) Berechnen Sie $E(\mathbf{X})$.
- (b) Berechnen Sie $cov(\mathbf{X})$.

Aufgabe 3

Welcher Zusammenhang besteht zwischen Poisson-Verteilung und Multinomialverteilung?

Aufgabe 4

Welcher Zusammenhang besteht zwischen Multinomialverteilung und Produkt-Multinomialverteilung?

Aufgabe 5

Gegeben sei eine zweidimensionale $(I \times J)$ -Kontingenztafel für zwei Variablen $X_A \in \{1, \dots, I\}$ und $X_B \in \{1, \dots, J\}$:

		X_B					
		1	...	j	...	J	
	1	X_{11}	...	X_{1j}	...	X_{1J}	X_{1+}
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
X_A	i	X_{i1}	...	X_{ij}	...	X_{iJ}	X_{i+}
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	I	X_{I1}	...	X_{Ij}	...	X_{IJ}	X_{I+}
		X_{+1}	...	X_{+j}	...	X_{+J}	X_{++}

Dabei bezeichne X_{ij} die Anzahl der Beobachtungen in der Zelle (i, j) .
 Des Weiteren gelte

$$\mu_{ij} = E(X_{ij}), \quad \mu_{i+} = \sum_{j=1}^J \mu_{ij}, \quad \mu_{+j} = \sum_{i=1}^I \mu_{ij}, \quad \mu_{++} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \mu_{ij}$$

für alle $i = 1, \dots, I$ und $j = 1, \dots, J$.

Zeigen Sie, dass für $(I \times J)$ -Kontingenztafeln die Hypothese

$$H_0 : \mu_{ij} = \frac{\mu_{i+}\mu_{+j}}{\mu_{++}}, \quad i = 1, \dots, I, \quad j = 1, \dots, J,$$

- (a) im Multinomial-Erhebungsschema äquivalent zur Unabhängigkeitshypothese ist,
- (b) im Produkt-Multinomial-Erhebungsschema äquivalent zur Homogenitätshypothese ist,
- (c) im Poisson-Erhebungsschema äquivalent dazu ist, dass keine Wechselwirkungen zwischen den beiden Faktoren bestehen.