1 Analyse von Kontigenztafeln: Das loglineare Modell

Aufgabe 6

Zeigen Sie, dass für $(I \times J)$-Kontingenztafeln die Hypothese

$$H_0: \quad \mu_{ij} = \frac{\mu_{i+}\mu_{+j}}{\mu_{++}}, \qquad i = 1, \ldots, I, \quad j = 1, \ldots, J,$$

äquivalent zum loglinearen Unabhängigkeitsmodell

$$\tilde{H}_0: \quad \log(\mu_{ij}) = \lambda + \lambda_{A(i)} + \lambda_{B(j)}, \qquad i = 1, \ldots, I, \quad j = 1, \ldots, J,$$

mit den Restriktionen

$$\sum_{i=1}^{I} \lambda_{A(i)} = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{J} \lambda_{B(j)} = 0$$

ist.

Aufgabe 7

Gegeben sei eine $(I \times J)$-Kontingenztafel.

(a) Bestimmen Sie für die drei Erhebungsschemata (Poisson-, Multinomial- bzw. Produktmultinomialerhebungsschema) die Anzahl freier Parameter!

Das zweidimensionale loglineare Modell für eine $(I \times J)$-Kontingenztafel hat allgemein folgende Form:

$$\log(\mu_{ij}) = \lambda + \lambda_{A(i)} + \lambda_{B(j)} + \lambda_{AB(ij)}, \qquad i = 1, \ldots, I, \quad j = 1, \ldots, J.$$

(b) Erklären Sie, warum Restriktionen für die Parameter notwendig sind!

(c) Geben Sie zwei verschiedene Restriktionsarten an!

(d) Kann man das loglineare Modell als Regressionsmodell auffassen?

Aufgabe 8

Gegeben sei eine zweidimensionale $(I \times J)$-Kontingenztafel mit den erwarteten Häufigkeiten $\mu_{ij} = E(X_{ij})$.

(a) Zeigen Sie, dass sich jedes der drei Erhebungsschemata (Poisson-, Multinomial- bzw. Produktmultinomialerhebungsschema) auf die Gestalt einer Expontialfamilie bringen lässt:

$$f(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\mu}) = c(\boldsymbol{x}) \cdot a(\boldsymbol{\mu}) \cdot \exp(\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})),$$

Dabei bezeichnet $\boldsymbol{x} = (x_{11}, \ldots, x_{IJ})^T$ die Zellhäufigkeiten und $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\mu})$ den natürlichen Parameter in Abhängigkeit von $\boldsymbol{\mu} = (\mu_{11}, \ldots, \mu_{IJ})^T$.

(b) Zeigen Sie ausgehend von (a), dass auch in der Parametrisierung eines zweidimensionalen loglinearen Modells $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda, \lambda_{A(1)}, \ldots, \lambda_{A(I)}, \lambda_{B(1)}, \ldots, \lambda_{B(J)}, \lambda_{AB(11)}, \ldots, \lambda_{AB(IJ)})^T$ unter Beachtung der entsprechenden Restriktionen eine Exponentialfamilie vorliegt.

Aufgabe 9

Gegeben sei eine (2×2)-Kontingenztafel:

$$
\begin{array}{cc|cc|c}
 & & \multicolumn{2}{c}{X_B} & \\
 & & 1 & 2 & \\
\hline
\multirow{2}{*}{X_A} & 1 & X_{11} & X_{12} & X_{1+} \\
 & 2 & X_{21} & X_{22} & X_{2+} \\
\hline
 & & X_{+1} & X_{+2} & X_{++}
\end{array}
$$

Im Vorfeld einer Untersuchung sollen folgende Modifikationen vorgenommen werden:

(i) Inhaltliche Vertauschung der Variablen X_A und X_B

(ii) Multiplikation von Zeilen- bzw. Spaltenhäufigkeiten mit einer Konstanten (ungleich Null)

Zeigen Sie, dass der *Odds Ratio* gegenüber dieser Modifikationen invariant ist, das *Relative Risiko* jedoch nicht.