Hinweis: Nach einer Wiederholung des Konzepts einiger Bootstrap-Konfidenzintervalle soll diese Aufgabe im Tutorium selbstständig gelöst werden. Die Lösung wird am Ende vorgestellt.

Aufgabe 2 (Bootstrap-Konfidenzintervalle)

Sei X eine Zufallsvariable mit unbekannter Verteilungsfunktion F. Nach fünf unabhängigen Ziehungen aus F liege die Stichprobe

$$\boldsymbol{x} = (2.49, 1.35, 2.48, 1.54, 3.84)^\top$$

vor. Von Interesse sei der Median θ bzgl. der Verteilung F, der durch den Stichprobenmedian $\hat{\theta}(\boldsymbol{x}) = 2.48$ geschätzt werden kann. Um die Schätzgenauigkeit zu quantifizieren sollen außerdem der Standardfehler $\mathrm{se}(\hat{\theta}(\boldsymbol{X}))$ des Schätzers $\hat{\theta}(\boldsymbol{X})$ und geeignete Konfidenzintervalle für den wahren Wert θ ermittelt werden. Da der Stichprobenumfang mit $n = 5$ eher gering ist, wird dazu Bootstrap verwendet.

Anders als in Aufgabe 1 wird parametrischer Bootstrap verwendet. Unter der Annahme, dass X normalverteilt ist, wurden folgende Bootstrap-Stichproben $\boldsymbol{x}^{*1}, \ldots, \boldsymbol{x}^{*11}$ generiert:

b	Bootstrap-Stichprobe $\boldsymbol{x}^{*b}$	Median $\hat{\theta}^*(b)$	$(\hat{\theta}^*(b))^2$
1	(2.21, 2.31, 3.06, 3.12, 3.17)	3.06	9.34
2	(2.30, 4.20, 2.79, 2.12, 3.11)	2.79	7.81
3	(3.34, 2.58, 2.52, 3.72, 2.42)	2.58	6.67
4	(2.18, 3.03, 2.57, 1.86, 1.67)	2.18	4.77
5	(0.21, 2.33, 2.93, 2.48, 4.16)	2.48	6.13
6	(2.83, 2.20, 4.32, 2.34, 2.14)	2.34	5.49
7	(1.59, 2.66, 0.52, 1.62, 1.81)	1.62	2.63
8	(3.11, 2.46, 1.49, 1.63, 0.86)	1.63	2.65
9	(3.09, 1.75, 3.91, 2.15, 2.60)	2.60	6.79
10	(1.25, 1.90, 2.49, 3.66, 2.37)	2.37	5.64
11	(2.51, 2.63, 2.07, 2.69, 1.36)	2.51	6.28
	Summe:	26.17	64.17

(a) Berechnen Sie mit Hilfe dieser Stichproben eine Bootstrap-Schätzung $\widehat{\mathrm{se}}(\hat{\theta}(\boldsymbol{X}))$ für den Standardfehler des Schätzers für den Median von X.
Hinweis: Verwenden Sie den Varianzverschiebungssatz sowie die Monte-Carlo-Approximation:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$$

$$\mathrm{E}(g(X)) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g(x_i)$$

(b) Berechnen Sie ein 80%-Wald-Konfidenzintervall für θ.
Hinweis: Einige Quantile der Standardnormalverteilung lauten:

5%	10%	20%	80%	90%	95%
-1.64	-1.28	-0.84	0.84	1.28	1.64

(c) Berechnen Sie ein 80%-Wald-t-Konfidenzintervall für θ indem Sie statt des Quantils der Standardnormalverteilung das entprechende Quantil einer geeigneten t-Verteilung verwenden. Ist das resultierende Intervall größer oder kleiner als das vorherige?
Hinweis: Einige Quantile verschiedener t-Verteilungen lauten:

	4 FG	5 FG	9 FG	10 FG	11 FG	49 FG	50 FG	54 FG	55 FG
5%	-2.13	-2.02	-1.83	-1.81	-1.80	-1.68	-1.68	-1.67	-1.67
10%	-1.53	-1.48	-1.38	-1.37	-1.36	-1.30	-1.30	-1.30	-1.30
20%	-0.94	-0.92	-0.88	-0.88	-0.88	-0.85	-0.85	-0.85	-0.85
80%	0.94	0.92	0.88	0.88	0.88	0.85	0.85	0.85	0.85
90%	1.53	1.48	1.38	1.37	1.36	1.30	1.30	1.30	1.30
95%	2.13	2.02	1.83	1.81	1.80	1.68	1.68	1.67	1.67

(d) Gegeben seien zusätzlich die approximativen Pivots

$$Z^*(b) = \frac{\hat{\theta}^*(b) - \hat{\theta}}{\hat{\text{se}}^*(b)}.$$

b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$Z^*(b)$	2.28	0.72	0.33	-1.00	-0.01	-0.28	-2.14	-1.81	0.28	-0.22	0.09

Berechnen Sie ein 80%-Bootstrap-t-Intervall für θ.

(e) Berechnen Sie ein 80%-Bootstrap-Perzentil-Intervall für θ.