Aufgabe 1

Bei einer Klausur werden 20 Multiple-Choice-Fragen mit jeweils vier angebotenen Antworten gestellt, von denen genau eine richtig ist. Zum Bestehen der Klausur sind 12 richtige Antworten notwendig und hinreichend. Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht ein Student, der

(a) bei jeder Frage zufällig eine der vier Antworten ankreuzt?

(b) bei jeder Frage eine der vier Antwortmöglichkeiten als falsch erkennt und rein zufällig eine der restlichen drei Antworten ankreuzt?

(c) bei jeder Frage zwei der vier Antwortmöglichkeiten als falsch erkennt und rein zufällig eine der restlichen Antworten ankreuzt?

(d) Wieviele Punkte müssten für das Bestehen notwendig und hinreichend sein, damit nur einer unter 1000 rein zufällig ankreuzenden Studenten die Klausur besteht, wenn eine der vier Antwortmöglichkeiten sicher als falsch identifiziert werden kann?

Hinweis: Verteilungsfunktionen der Binomialverteilung

x	$F(x)$
10	0.9961
11	0.9991
12	0.9998
13	1.0000
14	1.0000

Table 1: Verteilungsfunktion für $X \sim \mathcal{B}(n = 20, \pi = 1/4)$

x	$F(x)$
10	0.9624
11	0.9870
12	0.9963
13	0.9991
14	0.9998

Table 2: Verteilungsfunktion für $X \sim \mathcal{B}(n = 20, \pi = 1/3)$

x	$F(x)$
10	0.5881
11	0.7483
12	0.8684
13	0.9423
14	0.9793

Table 3: Verteilungsfunktion für $X \sim \mathcal{B}(n = 20, \pi = 1/2)$

Aufgabe 2

Betrachten Sie folgendes Zufallsexperiment: Eine faire Münze mit den Seiten 0 und 1 wird zweimal unabhängig geworfen. Die Zufallsvariable Z_1 beschreibe den ersten Münzwurf und Z_2 den zweiten Münzwurf. Nun sei $X = \min(Z_1, Z_2)$ definiert als das Minimum der beiden Münzwürfe und $Y = \max(Z_1, Z_2)$ als das Maximum der beiden Münzwürfe.

(a) Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von X und Y sowie die jeweiligen Randverteilungen.

(b) Bestimmen Sie die bedingte Verteilung von $Y|X = 0$.

Aufgabe 3

Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der exponentialverteilten Zufallsvariable $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ mit der Dichte

$$f_X(x; \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \qquad \lambda > 0.$$

Aufgabe 4

Seien X und Y Zufallsvariablen mit gemeinsamer Wahrscheinlichkeitsfunktion

$f_{X,Y}(x,y)$	$y=-1$	$y=0$	$y=2$
$x=0$	0.3	0.2	0
$x=1$	0.1	0.15	0.05
$x=2$	0	0.05	0.15

(a) Bestimmen Sie $E(X)$ und $Var(X)$.

(b) Bestimmen Sie die Kovarianz und Korrelation zwischen X und Y und interpretieren Sie diese.

(c) Bestimmen Sie die bedingte Verteilung von $Y|X=0$.