

Aufgabe 1

Unbedachterweise haben Sie Ihre private Telefonnummer in das öffentliche Telefonbuch eintragen lassen und bekommen ständig unerwünschte Werbeanrufe. Um sich beim Verbraucherschutzministerium beschweren zu können, möchten Sie die Zahl der Anrufe pro Tag schätzen und so eine fundierte Aussage der Form ‘zwischen x und y Anrufe pro Tag’ erlangen. An zehn Werktagen notieren Sie also, wieviele unerwünschte Werbeanrufe bei Ihnen eingingen: 3, 1, 5, 2, 4, 2, 3, 2, 1, 5.

Als Hörer der Vorlesung ‘Stochastik und Statistik’ unterstellen Sie der Zufallsvariablen X_i ‘Anzahl der Anrufe am Tag i ’ eine Poissonverteilung mit einem unbekanntem Parameter λ . Desweiteren nehmen Sie an, dass keine Abhängigkeit zwischen der Summe an Anrufen verschiedener Tage besteht, demnach also X_1, \dots, X_{10} unabhängig sind.

Was ist der Maximum-Likelihood-Schätzer für den Erwartungswert λ von X_i ?

Aufgabe 2

Sei $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ mit $X_i \sim \mathcal{G}(\pi)$ unabhängig verteilt, also mit Dichten

$$f_{X_i}(x_i, \pi) = \pi(1 - \pi)^{(x_i-1)}.$$

- Berechnen Sie den ML-Schätzer $\hat{\pi}$ analytisch.
- Bestimmen Sie den ML-Schätzer für $\mathbf{x} = (1, 3, 1, 49, 16, 1, 40, 26, 16, 12)$.
- Testen Sie die Null-Hypothese

$$H_0 : \pi \leq 1/10 \text{ vs. } H_1 : \pi > 1/10$$

zum Niveau $\alpha = 5\%$. Als Teststatistik könnte man $T(\mathbf{X}) = \sum_i X_i$ verwenden.

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst welcher Verteilung die Teststatistik folgt und ob große oder kleine Werte der Teststatistik für H_0 sprechen und verwenden Sie die geeignete Quantile aus der Verteilungsfunktion der negativen Binomialverteilung:

x	$F(x)$
45.00	0.0444
46.00	0.0494
47.00	0.0548
48.00	0.0605
49.00	0.0666

Table 1: Verteilungsfunktion der $\mathcal{NB}(n = 10, \pi = 0.1)$.

Aufgabe 3

Die Häufigkeit der Verkehrsunfälle an einer Kreuzung pro Woche sei poissonverteilt mit Erwartungswert λ und Varianz λ . Eine Stichprobe von $n = 500$ Wochen ergibt eine Gesamtzahl von 1051 Unfällen. Basierend auf die Normalapproximation, überprüfen Sie die Hypothese

$$H_0 : \lambda = 2 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \lambda \neq 2$$

auf dem Niveau $\alpha = 0.05$.

Aufgabe 4* (Abgabe bis Dienstag, 07.06.2016, 12:00 s.t.)

Sei $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ mit $X_i \sim \mathcal{B}(n, \pi)$ unabhängig binomial verteilt, also mit Dichten

$$f_{X_i}(x_i, \pi) = \binom{n}{x_i} \pi^{x_i} (1 - \pi)^{(n-x_i)}.$$

- (a) Stellen Sie die Likelihoodfunktion $L(\pi)$ auf.
- (b) Berechnen Sie die Log-Likelihoodfunktion $l(\pi) = \log(L(\pi))$ und vereinfachen Sie diese Funktion mit Hilfe der Logarithmus-Rechenregeln so weit wie möglich.
- (c) Berechnen Sie den ML-Schätzer $\hat{\pi}$ durch ableiten und Nullsetzen der Log-Likelihoodfunktion.