Aufgabe 1

Die Dichte einer $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilten Zufallsvariable ist gegeben durch

$$f(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Betrachten Sie nun n unabhängig normalverteilte Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ mit $X_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

a) Berechnen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für σ.

b) Konstruieren Sie ein approximatives 95%-Konfidenzintervall für σ mit der Wald-Methode.
Hinweis: $\Phi^{-1}(0.025) = -1.96$, $\Phi^{-1}(0.95) = 1.64$, $\Phi^{-1}(0.05) = -1.64$.

Aufgabe 2

Die Güte eines Schätzers $\hat{\theta}$ kann durch die erwartete quadrierte Abweichung zum wahren Parameter θ beurteilt werden: $E((\hat{\theta} - \theta)^2)$. Zeigen Sie, dass für einen erwartungstreuen Schätzer gilt:

$$E((\hat{\theta} - \theta)^2) = Var(\hat{\theta})$$

Aufgabe 3

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert $E(X_i) = \mu$ und Varianz $Var(X_i) = \sigma^2$.

(a) Zeigen Sie, dass der Mittelwert der Stichprobe $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_i^n X_i$ ein erwartungstreuer Schätzer für μ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $Var(\hat{\mu}) = \frac{1}{n}\sigma^2$ und $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n E(X_i X_j) = \frac{1}{n}\sigma^2 + \mu^2$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass die empirische Varianz $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_i^n (X_i - \hat{\mu})^2$ mit $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ nicht erwartungstreu für σ^2 ist. Wie kann man das reparieren?
Hinweis: Verwenden Sie $Var(\hat{\mu}) = \frac{1}{n}\sigma^2$ und $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n E(X_i X_j) = \frac{1}{n}\sigma^2 + \mu^2$.

(d) Welches der folgenden Schätzfunktionen für μ würden Sie bevorzugen, wenn $n = 3$ ist?

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_1 &= X_1 \\ \hat{\mu}_2 &= \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3) \end{aligned}$$