Aufgabe 1

$X = (X_1, \ldots, X_n)$ sei eine i.i.d. Stichprobe einer exponentialverteilten Zufallsvariablen, d.h. $X_i \sim Exp(\lambda)$ mit Dichte

$$f(x_i; \lambda) = \lambda \exp(-\lambda\, x_i)\, I_{(0,\infty)}(x_i).$$

a) Geben Sie für das Testproblem

$$H_0 : \lambda = 0.5 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \lambda \neq 0.5$$

einen Test $\psi(X)$ zum Niveau $\alpha = 0.05$ an und verwenden Sie als Teststatistik $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ und bestimmen Sie den/die kritischen Wert(e) des Tests für $n = 10$.

Hinweis: $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Ga(n, \lambda)$. Einige Quantile der $Ga(10, 0.5)$-Verteilung sind:

$q_{0.01}$	$q_{0.025}$	$q_{0.05}$	$q_{0.1}$	$q_{0.9}$	$q_{0.95}$	$q_{0.975}$	$q_{0.99}$
8.26	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57

b) Führen Sie den in a) konstruierten Test für $X = (4.1, 0.2, 1.1, 0.5, 0.1, 2.0, 1.5, 0.3, 1.2, 0.5)$ durch.

c) Geben Sie die Gestalt des zu obigem Testproblem gehörigen, auf der Normalapproximation beruhenden, asymptotischen Tests $\psi^*(X)$ an und führen Sie diesen Test für $n = 250$ und $\sum_{i=1}^{250} X_i = 23.8$ durch.

Hinweis: Für $Y \sim Ga(n, \lambda)$ gilt: $E(Y) = \frac{n}{\lambda}$, $Var(Y) = \frac{n}{\lambda^2}$.

Aufgabe 2

Seien $X_1, ..., X_n$ unabhängig identisch poisson-verteilte Zufallsvariablen mit der Dichte

$$f(x) = \frac{\theta^x}{x!} \cdot e^{-\theta}, \quad \theta > 0.$$

Gegeben sei die Stichprobe $\mathbf{x}^\top = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 2, 0)$ und der Maximum-Likelihood-Schätzer

$$\hat{\theta}_{ML} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x} = 0.5.$$

(a) Leiten Sie die Log-Likelihoodfunktion $l(\theta)$ her.

(b) Berechnen Sie ein 99% Wald-Konfidenzintervall für $\hat{\theta}_{ML}$.
Hinweis: $\Phi^{-1}(0.005) = -2.58$, $\Phi^{-1}(0.99) = 2.33$, $\Phi^{-1}(0.01) = -2.33$, $\Phi^{-1}(0.9) = 1.28$.

(c) Welches Problem fällt Ihnen am berechneten Konfidenzintervall auf? Wie könnte man dieses Problem umgehen?

(d) Bestimmen Sie die normierte Log-Likelihoodfunktion und erklären Sie, wie sich mit deren Hilfe die Berechnung der Intervallgrenzen eines 99% Likelihood-Intervalls als Nullstellenproblem einer Funktion $g(\theta)$ darstellen lässt.
Hinweis: Für die normierte Log-Likelihoodfunktion gilt: $-2\tilde{l}(\theta) \overset{a}{\sim} \chi^2_{(1)}$.

$1-\alpha$	$c = -\frac{1}{2}\chi^2_{(1)}$	$d = \sqrt{-2c}$	$\chi^2_{(1)}$
0.9	-1.35	1.65	2.7
0.95	-1.92	1.96	3.84
0.99	-3.32	2.58	6.64