Aufgabe 1

Sei $X \sim \mathcal{B}(n, \pi)$ und $\pi \in [0, 1]$ unbekannt, d.h.

$$f(x|\pi) = \binom{n}{x} \pi^x (1-\pi)^{n-x}, \quad x = 1, \dots, n$$

Für den Parameter π wird eine Betaverteilung angenommen, d.h.

$$\pi \sim \mathcal{B}e(\alpha, \beta) \quad \text{mit } \alpha, \beta > 0.$$

Hinweis: Die Dichte einer Betaverteilung $\mathcal{B}e(\alpha, \beta)$ ist $f(\pi) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \pi^{\alpha-1}(1-\pi)^{\beta-1}$.

(a) Bestimmen Sie die Posteriori-Dichte für π.
(Die Normierungskonstante kann vernachlässigt werden.)

(b) Welcher Verteilung entspricht die Posteriori-Verteilung?

(c) Bestimmen Sie den Posteriori-Erwartungswert.
Hinweis: Der Erwartungswert der Betaverteilung $\mathcal{B}e(\alpha, \beta)$ lautet $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$.

Aufgabe 2

Für $n = 60$ Studierende wurde die Haarfarbe ermittelt und in die Kategorien (Blond, Schwarz-Braun, Sonstige) aufgeteilt. Es ergab sich folgendes Ergebnis:

Blond	Schwarz-Braun	Sonstige
30	20	10

Es wird angenommen, dass eine diskrete Gleichverteilung für diese drei Haarfarbengruppen vorliegt.

a) Bestimmen Sie die erwarteten Häufigkeiten für die Haarfarbengruppen unter der Annahme, dass eine diskrete Gleichverteilung vorliegt.

b) Berechnen Sie das Pearson'sche χ^2-Maß.

c) Das Pearson'sche χ^2-Maß folgt unter der obigen Annahme einer χ^2_k-Verteilung mit k Feiheitsgraden. Geben Sie die Anzahl an Freiheitsgraden k im vorliegenden Beispiel an.

d) Überprüfen Sie die obige Annahme auf dem Niveau $\alpha = 0.1$

- **entweder** über die Berechnung des p-Werts,
- **oder** über den Vergleich des Pearson'schen χ^2-Maßes mit dem kritischen Wert der in c) bestimmten Verteilung.

Hinweis: Die Quantilsfunktion und die Verteilungsfunktion der χ^2-Verteilung sind für $k = 1, \dots, 5$ Freiheitsgrade im Anhang zu finden.

p	$\chi_1^2(p)$	p	$\chi_2^2(p)$	p	$\chi_3^2(p)$	p	$\chi_4^2(p)$	p	$\chi_5^2(p)$
0.05	0.00	0.05	0.10	0.05	0.35	0.05	0.71	0.05	1.15
0.10	0.02	0.10	0.21	0.10	0.58	0.10	1.06	0.10	1.61
0.15	0.04	0.15	0.33	0.15	0.80	0.15	1.37	0.15	1.99
0.20	0.06	0.20	0.45	0.20	1.01	0.20	1.65	0.20	2.34
0.25	0.10	0.25	0.58	0.25	1.21	0.25	1.92	0.25	2.67
0.30	0.15	0.30	0.71	0.30	1.42	0.30	2.19	0.30	3.00
0.35	0.21	0.35	0.86	0.35	1.64	0.35	2.47	0.35	3.33
0.40	0.27	0.40	1.02	0.40	1.87	0.40	2.75	0.40	3.66
0.45	0.36	0.45	1.20	0.45	2.11	0.45	3.05	0.45	4.00
0.50	0.45	0.50	1.39	0.50	2.37	0.50	3.36	0.50	4.35
0.55	0.57	0.55	1.60	0.55	2.64	0.55	3.69	0.55	4.73
0.60	0.71	0.60	1.83	0.60	2.95	0.60	4.04	0.60	5.13
0.65	0.87	0.65	2.10	0.65	3.28	0.65	4.44	0.65	5.57
0.70	1.07	0.70	2.41	0.70	3.66	0.70	4.88	0.70	6.06
0.75	1.32	0.75	2.77	0.75	4.11	0.75	5.39	0.75	6.63
0.80	1.64	0.80	3.22	0.80	4.64	0.80	5.99	0.80	7.29
0.85	2.07	0.85	3.79	0.85	5.32	0.85	6.74	0.85	8.12
0.90	2.71	0.90	4.61	0.90	6.25	0.90	7.78	0.90	9.24
0.95	3.84	0.95	5.99	0.95	7.81	0.95	9.49	0.95	11.07

Table 1: Quantilsfunktion der χ_k^2-Verteilung mit $k = 1, 2, 3, 4, 5$ Freiheitsgraden.

x	$F_{\chi_1^2}(x)$	x	$F_{\chi_2^2}(x)$	x	$F_{\chi_3^2}(x)$	x	$F_{\chi_4^2}(x)$	x	$F_{\chi_5^2}(x)$
4.00	0.95	4.00	0.86	4.00	0.74	4.00	0.59	4.00	0.45
4.50	0.97	4.50	0.89	4.50	0.79	4.50	0.66	4.50	0.52
5.00	0.97	5.00	0.92	5.00	0.83	5.00	0.71	5.00	0.58
5.50	0.98	5.50	0.94	5.50	0.86	5.50	0.76	5.50	0.64
6.00	0.99	6.00	0.95	6.00	0.89	6.00	0.80	6.00	0.69
6.50	0.99	6.50	0.96	6.50	0.91	6.50	0.84	6.50	0.74
7.00	0.99	7.00	0.97	7.00	0.93	7.00	0.86	7.00	0.78
7.50	0.99	7.50	0.98	7.50	0.94	7.50	0.89	7.50	0.81
8.00	1.00	8.00	0.98	8.00	0.95	8.00	0.91	8.00	0.84
8.50	1.00	8.50	0.99	8.50	0.96	8.50	0.93	8.50	0.87
9.00	1.00	9.00	0.99	9.00	0.97	9.00	0.94	9.00	0.89
9.50	1.00	9.50	0.99	9.50	0.98	9.49	0.95	9.50	0.91
10.00	1.00	10.00	0.99	10.00	0.98	10.00	0.96	10.00	0.92
10.50	1.00	10.50	0.99	10.50	0.99	10.50	0.97	10.50	0.94
11.00	1.00	11.00	1.00	11.00	0.99	11.00	0.97	11.00	0.95

Table 2: Verteilungsfunktion der χ_k^2-Verteilung mit $k = 1, 2, 3, 4, 5$ Freiheitsgraden.

Aufgabe 3

Gegeben Sei eine homogene Markovkette $X_0, X_1, X_2, \ldots$ mit Zustandsraum $\{A, B\}$ und der Übergangsmatrix

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Die Startverteilung sei gegeben durch $P(X_0 = A) = 0.2$. Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

(a) $P(X_3 = A)$

(b) $P(X_3 = A | X_1 = B, X_0 = A)$

(c) $P(X_3 = A | X_2 = B, X_1 = B, X_0 = A)$

(d) $P(X_3 = A | X_6 = A)$