Aufgabe 1

Die drei Knaben (A)ndreas, (B)ernd und (C)asimir werfen sich gegenseitig einen Ball zu. Wann immer A den Ball hat, wirft er ihn mit W'keit 0.8 zu B. Wenn B den Ball hat, wirft er ihn zu C mit W'keit 0.4. Den Ball zu behalten ist nicht zulässig. Hat C den Ball, wirft er mit gleicher W'keit zu A oder B.

(a) Betrachten Sie das Spiel als homogene Markovkette $X_0, X_1, \ldots$ mit Zustandsraum $\{A, B, C\}$. Geben Sie die Übergangsmatrix $\boldsymbol{P}$ an.

(b) Die Anfangsverteilung $\mu^{(0)}$ sei eine Gleichverteilung. Wer hat mit größter W'keit den Ball zum Zeitpunkt $n = 2$?

Aufgabe 2

Eine Nachricht der Form "ja" wird durch mündliche Zwischenträger weitergegeben. Bei jeder Weitergabe wird "ja" mit der Wahrscheinlichkeit 0.3 in "jein" und mit Wahrscheinlichkeit 0.2 in "nein" abgefälscht; "nein" wird mit der Wahrscheinlichkeit 0.2 in "ja" und mit Wahrscheinlichkeit 0.3 in "jein" verfälscht und ein "jein" wird mit der Wahrscheinlichkeit 0.2 in "ja" und mit Wahrscheinlichkeit 0.3 in "nein" verfälscht. Dieses System wird durch eine homogene Markov-Kette 1. Ordnung beschrieben, wobei X_n die Nachricht im Schritt n (vor der $(n+1)$-ten Weitergabe) darstellt.

a) Geben Sie die zugehörige Übergangsmatrix $\mathbf{P}$ an.

b) Berechnen sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nach zwei Zwischenträgern der Empfänger die Nachricht "ja" erhält.

c) Berechnen sie die Wahrscheinlichkeit für folgenden Zustandsverlauf:

$$X_0 = \text{ja}, X_2 = \text{ja}, X_4 = \text{ja}$$

Aufgabe 3

Ein Hamster lebt in einem Käfig mit drei Bereichen: Schlafbereich (S), Essensbereich (E) und Wohnbereich (W). Immer, wenn der Hamster im Schlafbereich geschlafen hat, geht er danach direkt in den Essbereich. Nach dem Essen verlässt der Hamster den Essbereich und geht mit 80% Wahrscheinlichkeit in den Wohnbereich. Vom Wohnbereich aus geht er mit gleicher Wahrscheinlichkeit entweder in den Essensbereich oder in den Schlafbereich. Es wird angenommen, dass die Folge der Bereiche, die der Hamster nacheinander aufsucht, eine homogene Markov-Kette $\boldsymbol{X} = (X_0, X_1, X_2, \ldots)$ bildet mit dem Zustandsraum $\{S, E, W\}$ und der Übergangsmatrix

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ S \\ E \\ W \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S & E & W \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & p_{SE} & 0 \\ p_{ES} & 0 & p_{EW} \\ p_{WS} & p_{WE} & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

a) Stellen Sie mit Hilfe dieser Angaben die konkrete Übergangsmatrix auf.

b) Nehmen Sie für die folgenden Aufgaben an, dass sich der Hamster zum Anfangszeitpunkt im Schlafbereich befindet und geben Sie die Anfangsverteilung μ_0 an.

c) In welchem Bereich befindet sich der Hamster zum Zeitpunkt n = 2 mit der größten Wahrscheinlichkeit?

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(\{X_0 = S\} \cap \{X_2 = E\})$ und interpretieren Sie diese.

e) Ist die Markov-Kette $\boldsymbol{X}$ irreduzibel? Begründen Sie Ihre Antwort.

f) Überprüfen Sie, bei welcher der folgenden Verteilungen es sich um die stationäre Verteilung von $\boldsymbol{X}$ handelt:

$$\boldsymbol{\pi}^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{5}{12}, \frac{1}{3}\right) \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{\pi}^{**} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Aufgabe 4

Herr Meier liest die *Süddeutsche Zeitung* jeden Tag und steckt diese dann in einen Zeitungsständer mit einem maximalen Fassungsvermögen von 5 Zeitungen. Frau Meier hat gelegentlich einen Putzanfall (jeden Tag mit W'keit 1/3) und wirft am Abend alle Zeitungen, die sich im Zeitungsständer befinden, weg. Wenn der Zeitungsständer voll ist, wirft Herr Meier die Zeitungen eigenhändig am Abend weg.

Beschreiben Sie die Anzahl der Zeitungen im Zeitungsständer (nachdem die Meiers zu Bett gegangen sind) mit Hilfe einer Markov-Kette und bestimmen Sie die Übergangsmatrix.