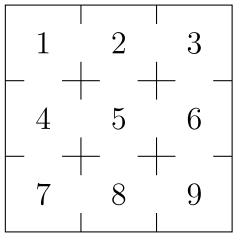
Aufgabe 1

Ein Hamster wird in das folgende Labyrinth gesetzt:



Er bewegt sich zufällig durch die Räume und bei k Möglichkeiten zum Verlassen eines Raumes wählt er mit gleicher Wahrscheinlichkeit eine dieser Möglichkeiten.

Sei $S = \{1, \dots, 9\}$ der Zustandsraum der homogenen Markov-Kette $X = \big\{X_n, n \in \mathbb{N}\big\}$, die angibt, in welchem Raum sich der Hamster befindet.

(a) Zeichnen Sie den dazugehörigen gerichteten Markov-Graphen.

(b) Geben Sie die Übergangsmatrix $\mathbf{P}$ dieser Markov-Kette an.

(c) Ist X irreduzibel?

(d) Welche Zustände von X sind rekurrent, welche transient?

In Raum 4 werden jetzt Sonnenblumenkerne – die Lieblingsspeise des Hamsters – gelegt. Demzufolge bewegt sich der Hamster nicht mehr aus Raum 4 weg, wenn er einmal dort angekommen ist. Die Folge der Räume, in denen sich der Hamster befindet, wird weiterhin als Markov-Kette aufgefasst.

(e) Geben Sie die Übergangsmatrix und den gerichteten Markov-Graphen für diese modifizierte Markov-Kette an.

(f) Ist die modifizierte Markov-Kette irreduzibel?

(g) Welche Zustände sind rekurrent, welche transient?

Aufgabe 2

Der Prozess, der zu einer Einweisung einer Person in ein Krankenhaus führt, kann durch eine Markov-Kette 1. Ordnung mit der folgenden Übergangsmatrix für die Zustände $S_0, \dots, S_4$ beschrieben werden:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} S_0 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & 0 & p_{04} \\ 0 & p_{11} & 0 & p_{13} & p_{14} \\ 0 & 0 & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} S_0 \text{ gesund} \\ S_1 \text{ leichte Erkrankung, nicht im Krankenhaus} \\ S_2 \text{ schwere Erkrankung, im Krankenhaus} \\ S_3 \text{ krank, im Krankenhaus} \\ S_4 \text{ tot} \end{array}$$

(a) Zeichnen Sie den zur Übergangsmatrix gehörenden Markov-Graphen.

(b) Welche Zustände sind absorbierend?

(c) Ist die Markov-Kette irreduzibel?

Aufgabe 3

Gegeben seien die Daten (x_i, y_i), für $i = 1, \ldots, n$ Personen. Als lineares Modell nehmen Sie

$$y_i = x_i\beta + u_i$$

an. Geben Sie die allgemeine Form eines Schätzers für β an und berechnen Sie $\hat{\beta}$ unter Annahme folgender Daten:

	i	1	2	3	4	5	6	7
Körpergröße	y_i	170	181	168	190	188	175	169
Schuhgröße	x_i	41	43	42	43	44	42	41

Aufgabe 4

Für das lineare Regressionsmodell

$$Y_i = \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + U_i \;, \quad (i = 1, \ldots, n)$$

und $n = 8$ Beobachtungen seien die in der nachfolgenden Tabelle angegebenen (hypothetischen) Daten verfügbar:

i	y_i	x_{i1}	x_{i2}	x_{i3}
1	3	1	1	2
2	8	1	3	4
3	4	1	1	4
4	6	1	1	4
5	6	1	3	4
6	5	1	1	2
7	7	1	3	6
8	9	1	3	6

a) Stellen Sie die Designmatrix $\mathbf{X}$ auf und berechnen Sie $\mathbf{X}^\top\mathbf{X}$ und $\mathbf{X}^\top Y$

b) Zeigen Sie, dass $\hat{\beta} = (2, 1, 0.5)^\top$ der Kleinste-Quadrate Schätzer für $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^\top$ ist.

c) Berechnen Sie den Kleinste-Quadrate Schätzer für die Varianzen σ^2 der Störgrößen U_i $(i = 1, \ldots, 8)$.

Betrachten Sie nun das lineare Modell in Matrixform $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{U}$ mit n Beobachtungen und p Einflußgrößen (ohne lineare Abhängigkeiten).

d) Geben Sie für die Regression mit Absolutglied β_0 die Dimension und den Rang folgender Matrizen an: $\mathbf{Y}$, $\mathbf{X}$, β, $\mathbf{U}$, $\mathbf{X}'\mathbf{X}$, $\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$. Wie ändern sich Dimension und Rang im Falle der Regression ohne Absolutglied?