Loesung 1

Lösungen zum Quiz:

- Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung

  (a) **1)** Bedingte Wahrscheinlichkeit: $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

  2) Satz der totalen Wahrscheinlichkeit:

  $$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$

  mit $B_1, B_2, \ldots, B_n$ disjunkte Zerlegung von Ω.

  3) Satz von Bayes: $P(B|A) = \dfrac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$

  (b) Zwei Ereignisse A, B sind unabhängig, wenn

  $$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

  gilt.

  (c) $A \backslash B$ ist die Menge A OHNE der Menge B.
  Wenn $A = B$, dann ist $A \backslash B = \emptyset$, d.h. $P(A \backslash B) = P(\emptyset) = 0$.

- Zufallsvariablen

  (a) Stetige ZV:

  $$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx$$

  Diskrete ZV:

  $$E(X) = \sum_{x \in \mathcal{T}} x \cdot P(X = x) = \sum_{x \in \mathcal{T}} x \cdot f(x)$$

  (b) Diskrete ZV: $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{i: x_i \leq x} f(x_i)$
  Stetige ZV: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\, du$

  (c) $\mathrm{E}(\bar{X}) = \mathrm{E}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(X_i) = \frac{1}{n} n\mu = \mu$
  $\mathrm{Var}(\bar{X}) = \mathrm{Var}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{1}{n}\sigma^2$
  Aus dem zentralen Grenzwertsatz folgt

  $$\bar{X} \overset{a}{\sim} N(\mu, \sigma^2/n)$$

  Bzw. mit Standardisierung

  $$\frac{\bar{X} - \mathrm{E}(\bar{X})}{\sqrt{\mathrm{Var}(\bar{X})}} \overset{a}{\sim} \mathcal{N}(0, 1).$$

  (d) unkorreliert heißt $\rho(X, Y) = 0$ und gilt nur dann, wenn $Cov(X, Y) = 0$ ist, da
  $\rho(X, Y) = \dfrac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$

  (e) Der Satz von Kolmogorov muss erfüllt sein, d.h.

– für stetige Dichten: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1$ und $f(x) \geq 0$.
– für diskrete Dichten: $\sum_{x \in \mathcal{T}} f(x) = 1$ und $f(x) \geq 0$.

(f) Der Transformationssatz für Dichten lautet
$f_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right) \cdot \left|\frac{\partial g^{-1}(y)}{\partial y}\right|$
Folie 74 von Foliensatz 2:
Betrachte $X \sim \mathcal{U}[0,1]$ und $Y = -\log(X)$, also $g(x) = -\log(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \overset{a=0,b=1}{=} \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Umkehrfunktion und deren Ableitung lauten:

$$g^{-1}(y) = \exp(-y) \qquad \frac{dg^{-1}(y)}{dy} = -\exp(-y)$$

Durch Anwendung des Transformationssatzes für Dichten erhält man:

$$f_Y(y) = 1 \cdot |-\exp(-y)| = \exp(-y)$$

Es gilt: $Y \sim \mathcal{E}(\lambda = 1)$! Dies ist also eine einfache Art, exponentialverteilte Zufallsvariablen zu erzeugen!

- Inferenz

(a) **Maximum-Likelihood-Schätzung**
bei <u>unabhängig identisch</u> verteilten Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$:

bekannt: Verteilung der X_i
unbekannt: Parameter θ der Verteilung

<u>Ziel</u>: Schätzung von θ anhand einer Stichprobe $X = (X_1, \ldots, X_n)$

Jede Zufallsvariable X_i hat Dichte $f(x_i, \theta)$

Gemeinsame Dichte der X_i = **Likelihoodfunktion** (abhängig von θ)

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta)$$

(Produkt über die einzelnen Dichten, da hier X_i unabhängig identisch verteilt

Loglikelihoodfunktion:

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \log f(x_i, \theta)$$

ML-Schätzung $\hat{\theta}_{ML}$ ist das θ, für das die Likelihood (bzw. Loglikelihood) maximal ist, d.h.
– $l'(\theta) = 0$
– $l''(\theta) < 0$

(b) Ja, argmax $L(\hat{\theta}_{ML})$ = argmax $l(\hat{\theta}_{ML})$, allerdings ist das Ableiten der log-Likelihoodfunktion aufgrund der Summe einfacher.

(c) Der Standardfehler

$$SE(\hat{\theta}_{ML}) = \sqrt{(-l''(\hat{\theta}_{ML}))^{-1}}$$

- Markov-Ketten
  - (a) Der schrittweise Wechsel eines Prozesses zwischen beliebig viele diskreten Zuständen.
  - (b) Ja, aus dem Graphen kann die Übergangsmatrix konstruiert werden (und umgekehrt).