Aufgabe 1

a) Seien A und B zwei beliebige, aber nicht gleichelementige Teilmengen einer Menge Ω. Stellen Sie die folgenden Mengen in aussagenlogischer Notation dar:
   i) die Menge A und ihr Komplement A^C,
   ii) der (Durch-)Schnitt von A und B,
   iii) die Vereinigung von A und B,
   iv) die Differenz von A und B,
   v) das reelle Intervall von 0 bis 1, inklusive der Intervallgrenzen.

b) Sei I eine Indexmenge und $A_i \subset \Omega$ für $i \in I$. Zeigen Sie in aussagenlogischen Notation die Gültigkeit der de Morganschen Regeln:

$$\bigcup_{i\in I} A_i^C = \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^C \qquad \text{und} \qquad \bigcap_{i\in I} A_i^C = \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^C$$

Aufgabe 2

Beweisen Sie folgenden Satz aus der Vorlesung:

Satz 2.10 (Durchschnitt von σ-Algebren).
Sei Ω eine Menge, sei I eine Indexmenge und für jedes $i \in I$ sei $\mathcal{A}_i$ eine σ-Algebra auf Ω. Dann ist auch

$$\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i := \{A \subset \Omega \mid A \in \mathcal{A}_i \ \forall i \in I\}$$

eine σ-Algebra auf Ω.

Aufgabe 3

Sind folgende Systeme von Mengen aus Ω σ-Algebren von Ω?

a) $\mathcal{P}(\Omega)$ mit $\Omega = \mathbb{N}$
b) System aller Mengen $A \subset \Omega$, für welche A oder A^C abzählbar ist; $\Omega = \mathbb{R}$
c) Sei der Ereignisraum $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$ gegeben. Ist $\mathcal{F} = \Big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c, d, e\}, \{a, c, d, e\}, \{b, c, d, e\}, \Omega\Big\}$ eine σ-Algebra?
d) Zeigen Sie anhand eines Beispieles für $\Omega = \{a, b, c\}$, dass $\mathcal{H} = \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$, die Vereinigung zweier σ-Algebren $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ über Ω nicht unbedingt wieder eine σ-Algebra ist.

Aufgabe 4

Für $n \in \mathbb{N}_0$ (Menge der natürlichen Zahlen inklusive 0) seien die Mengen $A_n = \{0, 1, \ldots, 2n\}$ gegeben.

a) Geben Sie für ein allgemeines $n \geq 1$ die Menge $B_n = A_{n-1}^C \cap A_n$ an.
b) Sei $B_0 = \{0\}$. Zeigen Sie, dass die Mengen B_n mit $n \in \mathbb{N}_0$ eine disjunkte Zerlegung von $\mathbb{N}_0$ bilden.
c) Sei $\mathcal{A}$ die von den Mengen $A_n, n \in \mathbb{N}_0$, erzeugte σ-Algebra. Zeigen Sie, dass auch die Mengen $B_n, n \in \mathbb{N}_0$, einen Erzeuger von $\mathcal{A}$ bilden.
d) Gilt $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$? Begründen Sie Ihre Antwort.