Aufgabe 1

Beweisen Sie folgenden Satz aus der Vorlesung:

Satz 8.6. *Sei* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum. Seien*

$$X_1 \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P), \quad X_2 \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P), \quad \ldots, \quad X_n \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$$

stochastisch unabhängige Zufallsvariablen. Dann ist

$$\mathbb{E}_P\left[\prod_{i=1}^n X_i\right] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}_P\big[X_i\big] \tag{1}$$

und

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \operatorname{Var}\big(X_i\big)\,. \tag{2}$$

Aufgabe 2

Gegeben seien zwei Messräume $(\Omega_i, \mathcal{A}_i), i = 1, 2$, wobei

$$\sharp(\Omega_1) = m_1 < \infty \quad \text{und} \quad \sharp(\Omega_2) = m_2 < \infty$$

gelte. Man zeige, dass die von allen Mengen $A_1 \times A_2$ mit $A_i \in \mathcal{A}_i$ erzeugte σ-Algebra in $\Omega_1 \times \Omega_2$ aus denjenigen Mengen besteht, welche die Vereinigung jeweils endlich vieler Mengen der Form, $A_1 \times A_2, A_i \in \mathcal{A}_i$ sind.

Aufgabe 3

Seien X und Y zwei stochastisch unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen jeweils auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$.

a) Leiten Sie die gemeinsame Dichte von $\exp(X)$ und $\exp(Y)$ her.
Sie können dabei eine geeignete Messbarkeit der gemeinsamen Dichtefunktion voraussetzen.

Sei im Folgenden nun $\mu_x = \mu_y = 0$ und $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 1$.

b) Leiten Sie die Dichte der Verteilung von $S = X + Y$ her.

Hinweis: Die Dichte einer normalverteilten Zufallsvariablen X ist

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right)\,.$$

Aufgabe 4

Man betrachte die beiden Maßräume $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$, wobei $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathfrak{B}$, $\mu_1 = \lambda$ und μ_2 ein nicht σ-endliches Zählmaß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ ist. In diesem Fall hier ist μ_2 definiert als

$$\mu_2(A) \longmapsto \begin{cases} |A| & \text{falls } A \text{ endlich,} \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man zeige, dass für die Diagonale $D = \{(\omega_1, \omega_2) \,|\, \omega_1 = \omega_2\}$ von $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \Omega_1 \times \Omega_2$ die Gleichheit

$$\int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} I_D(\omega_1, \omega_2)\, \mu_2(d\omega_2)\mu_1(d\omega_1) = \int_{\Omega_2}\int_{\Omega_1} I_D(\omega_1, \omega_2)\, \mu_1(d\omega_1)\mu_2(d\omega_2)$$

nicht gilt.