

## 4.Tutorium Generalisierte Regression

- Tests/Devianz -

Minh Anh Le:

12.12.2016 und 19.12.2016

Nicole Schüller:

15.12.2016 und 22.12.2016

Institut für Statistik, LMU München

## Gliederung

- 1 Testen linearer Hypothesen
- 2 LR-Test
- 3 Alternative Tests
- 4 Devianz
- 5 LR-Test mit R

## Gliederung

- 1 Testen linearer Hypothesen
- 2 LR-Test
- 3 Alternative Tests
- 4 Devianz
- 5 LR-Test mit R

## Mögliche Problemstellungen und Hypothesen

### Häufige Problemstellungen:

- (a) Sind die Modellparameter überhaupt aussagekräftig, oder würde ein reines Interceptmodell genügen?
- (b) Kann man Einflussgrößen aus dem Modell herausnehmen, ohne die Güte des Fits dabei zu stark zu beeinträchtigen?

### Zugehörige Hypothesen:

- zu (a)  $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = 0$  ;  $\beta_0$  beliebiger Intercept  
 $H_1: \beta_j \neq 0$  für mind. ein  $j \in \{1, \dots, p\}$
- zu (b)  $H_0: \beta \in \Omega_0$   
 $H_1: \beta \in \Omega_1$  ; mit  $\Omega_0 \subseteq \Omega_1$

Leicht zu erkennen: (a) ist Spezialfall von (b)

## Darstellung linearer Hypothesen

- Lineare Hypothesen ( $\mathbf{C}$  mit vollem Spaltenrang!)

$$H_0 : \mathbf{C}\beta = \delta$$

$$H_1 : \mathbf{C}\beta \neq \delta$$

- Beispiel:

$$H_0 : \beta_1 = \beta_3$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(0 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad \dots)}_{\mathbf{c}} \beta = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta_1 - \beta_3 = 0$$

- Der Rang von  $\mathbf{C}$  bestimmt die Anzahl an Hypothesen!

## Gliederung

- 1 Testen linearer Hypothesen
- 2 LR-Test**
- 3 Alternative Tests
- 4 Devianz
- 5 LR-Test mit R

## Form des LR-Tests

- Hypothesen:

$$H_0: \beta \in \Omega_0$$

$$H_1: \beta \in \Omega_1; \quad \text{mit } \Omega_0 \subseteq \Omega_1$$

- Likelihood-Quotient(LQ)/Likelihood-Ratio(LR):

$$\Lambda = \frac{\max L(\beta | \Omega_0)}{\max L(\beta | \Omega_1)}$$

- Falls  $\beta \in \Omega_0 \Leftrightarrow \mathbf{C}\beta = \delta$  (als lineare Hypothese)  $\Rightarrow \Lambda \approx 1!$

## Form des LR-Tests

- Teststatistik:

$$\lambda = -2\log(\Lambda) = -2[\ell(\tilde{\beta}) - \ell(\hat{\beta})]$$

$\tilde{\beta}$  ist ML-Schätzer unter  $H_0$

$\hat{\beta}$  ist ML-Schätzer unter  $H_1$

- Ablehnungsbereich:

$$\lambda > \chi_{1-\alpha}^2(\text{rg}(\mathbf{C}))$$

## Gliederung

- 1 Testen linearer Hypothesen
- 2 LR-Test
- 3 Alternative Tests**
- 4 Devianz
- 5 LR-Test mit R

## Wald-Test

- Prinzip: Betrachte die Differenz  $\mathbf{C}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\delta}$
- Teststatistik:

$$w = (\mathbf{C}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\delta})^T (\mathbf{C}\mathbf{F}(\hat{\boldsymbol{\beta}})^{-1}\mathbf{C}^T)^{-1} (\mathbf{C}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\delta})$$

- Falls  $H_0$  nicht wahr  $\Rightarrow \mathbf{C}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\delta}$  groß!
- Spezialfall:  $H_0 : \beta_r = 0$

$$w = \left( \frac{\hat{\beta}_r}{\sqrt{a_{rr}}} \right)^2 \stackrel{H_0}{\sim} \chi^2(1)$$

( $a_{rr}$  ist r-tes Diagonalelement von  $\mathbf{F}(\hat{\boldsymbol{\beta}})^{-1}$ )

## Scoretest

- Prinzip: Betrachte Scorefunktion

$$\mathbf{s}(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{x}\mathbf{D}(\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\beta})^{-1}[\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\beta})]$$

- Teststatistik:

$$u = \mathbf{s}(\tilde{\boldsymbol{\beta}})^T \mathbf{F}(\tilde{\boldsymbol{\beta}})^{-1} \mathbf{s}(\tilde{\boldsymbol{\beta}})$$

- Falls  $H_0$  wahr, sollte  $\mathbf{s}(\tilde{\boldsymbol{\beta}})$  ähnlich sein zu  $\mathbf{s}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ , also  $\mathbf{0}$ !

## Vergleich von LR-, Wald- und Score-Test:

- Gemeinsamkeit:  $\lambda, w, u \stackrel{H_0}{\sim} \chi^2(\text{rg}(\mathbf{C}))$
- Berechnung von  $w$  ausschließlich auf Basis von  $\hat{\beta}$
- Berechnung von  $u$  ausschließlich auf Basis von  $\tilde{\beta}$
- $\lambda$  am kompliziertesten zu berechnen, da  $\hat{\beta}$  und  $\tilde{\beta}$  berechnet werden müssen. Aber dafür exakteste Teststatistik
- $\lambda$  durch  $w$  und  $u$  approximierbar
- $\lambda, w$  und  $u$  asymptotisch effizient

## Gliederung

- 1 Testen linearer Hypothesen
- 2 LR-Test
- 3 Alternative Tests
- 4 Devianz**
- 5 LR-Test mit R

## Definition

- Maß für die Anpassungsgüte des Modells an die Daten
- Devianz

$$D(\mathbf{y}, \hat{\boldsymbol{\mu}}) = -\phi 2 \left( \underbrace{\ell(\mathbf{y}, \hat{\boldsymbol{\mu}})}_{\text{Likelihood des Modells}} - \underbrace{\ell(\mathbf{y}, \mathbf{y})}_{\text{Likelihood des saturierten Modells}} \right)$$

- Betrachte Form der Exponentialfamilie

$$D(\mathbf{y}, \hat{\boldsymbol{\mu}}) = 2 \sum_{i=1}^n (y_i(\theta(y_i) - \theta(\hat{\mu}_i)) - (b(\theta(y_i)) - b(\theta(\hat{\mu}_i))))$$

- Beispiel: Normalverteilung

$$D(\mathbf{y}, \hat{\boldsymbol{\mu}}) = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\mu}_i)^2$$

## LR-Test und Devianz

Die Teststatistik des LR-Tests ist über die Devianzen der zu vergleichenden Modelle berechenbar:

$$\begin{aligned}\lambda &= -2 \log(\Lambda) \\ &= -2[\ell(\mathbf{y}, \hat{\boldsymbol{\mu}}|\Omega_0) - \ell(\mathbf{y}, \hat{\boldsymbol{\mu}}|\Omega_1)] \\ &= -2[\ell(\mathbf{y}, \hat{\boldsymbol{\mu}}|\Omega_0) - \ell(\mathbf{y}, \mathbf{y}) - \ell(\mathbf{y}, \hat{\boldsymbol{\mu}}|\Omega_1) + \ell(\mathbf{y}, \mathbf{y})] \\ &= \frac{D(\mathbf{y}, \hat{\boldsymbol{\mu}}|\Omega_0) - D(\mathbf{y}, \hat{\boldsymbol{\mu}}|\Omega_1)}{\phi}\end{aligned}$$

## Gliederung

- 1 Testen linearer Hypothesen
- 2 LR-Test
- 3 Alternative Tests
- 4 Devianz
- 5 LR-Test mit R**

## LR-Test mit R

[vgl. Problemstellungen auf Folie 4]

- zu (a) • Berechnung über Summary:

$$\frac{\text{Null Deviance} - \text{Residual Deviance}}{\text{Dispersion Parameter}} \stackrel{H_0}{\sim} \chi^2(\text{rg}(\mathbf{C}))$$

- Berechnung über `lrtest(Modell)` aus Package `lmtest`

- zu (b) • Berechnung über Summaries:

$$\frac{\text{Residual } D_{\Omega_0} - \text{Residual } D_{\Omega_1}}{\text{Dispersion Parameter}} \stackrel{H_0}{\sim} \chi^2(\text{rg}(\mathbf{C}))$$

- Berechnung über `lrtest(Modell|\Omega_0, Modell|\Omega_1)`

[⇒ Identische Dispersionsparameter  $\phi$  für beide Modelle nötig!]