

Aufgabe 1

Seien (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $C \in \mathcal{A}$ und

$$\mathcal{C} = \sigma(C) \quad .$$

Was ist dann

$$\mathbb{E}[X | \mathcal{C}]$$

für $X \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$?

Hinweis: Sie können davon ausgehen, dass $P(C) > 0$ für alle $C \in \mathcal{C}$ gilt.

Aufgabe 2

Seien X und Y zwei reelle Zufallsvariablen, welche die 2-dimensionale um 0 zentrierte Normalverteilung $d\mathcal{N}_{\rho, \sigma^2} = f d\lambda^2$ mit Korrelation $\rho \in (-1, 1)$ und mit gleicher Varianz $\sigma^2 > 0$ besitzen.

$$f(x, y) := \frac{(1 - \rho^2)^{-1/2}}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2(1 - \rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)\right)$$

Wie sieht die bedingte Dichtefunktion $f(x | y)$ aus? Beweisen Sie, dass

$$\mathbb{E}[X | Y] = \rho Y \quad .$$

Aufgabe 3

Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Seien

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_n \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$$

stochastisch unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(Y_i) = 0$. Setze

$$X_n = \sum_{j=1}^n Y_j \quad .$$

Zeigen Sie, dass in diesem Fall gilt:

$$\mathbb{E}_P[X_n | X_1, \dots, X_{n-1}] = X_{n-1} \quad P\text{-f.s.}$$