Stetige Verteilungen

Name	Symbol	Parameter	Definitionsbereich	Zähldichte	Kennzahlen
Stetige Gleichverteilung	$Y \sim \mathrm{U}(a,b)$	$a,b \in \mathbb{R}$ $a<b$	$y \in [a,b]$	$p(y\|a,b) = \frac{1}{b-a}$	$\mathbb{E}(Y\|a,b) = \frac{a+b}{2}$ $\mathrm{Var}(Y\|a,b) = \frac{(b-a)^2}{12}$
Univariate Normalverteilung	$Y \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$	$\mu \in \mathbb{R}$ $\sigma^2 > 0$	$y \in \mathbb{R}$	$p(y\|\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\big(-\frac{1}{2}\frac{(y-\mu)^2}{\sigma^2}\big)$	$\mathbb{E}(Y\|\mu,\sigma^2) = \mu$ $\mathrm{Var}(Y\|\mu,\sigma^2) = \sigma^2$
Multivariate Normalverteilung	$Y \sim \mathrm{N}(\mu,\Sigma)$	$\mu \in \mathbb{R}^d$ $\Sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$ s.p.d.*	$y \in \mathbb{R}^d$	$p(y\|\mu,\Sigma) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \det(\Sigma)^{-\frac{1}{2}} \cdot$ $\exp\big(-\frac{1}{2}(y-\mu)^T\Sigma^{-1}(y-\mu)\big)$	$\mathbb{E}(Y\|\mu,\Sigma) = \mu$ $\mathrm{Var}(Y\|\mu,\Sigma) = \Sigma$
Log-Normalverteilung	$Y \sim \mathrm{LogN}(\mu,\sigma^2)$	$\mu \in \mathbb{R}$ $\sigma^2 > 0$	$y > 0$	$p(y\|\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}y} \exp\big(-\frac{(\log y-\mu)^2}{2\sigma^2}\big)$	$\mathbb{E}(Y\|\mu,\sigma^2) = \exp(\mu + \frac{\sigma^2}{2})$ $\mathrm{Var}(Y\|\mu,\sigma^2) = \exp(2\mu+\sigma^2)(\exp(\sigma^2)-1)$
Nichtzentrale Studentverteilung	$Y \sim t_\nu(\mu,\sigma)$	$\mu \in \mathbb{R}$ $\sigma^2, \nu > 0$	$y \in \mathbb{R}$	$p(y\|\mu,\sigma^2,\nu) =$ $\frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{\nu\pi\sigma}}\big(1+\frac{(y-\mu)^2}{\nu\sigma^2}\big)^{-\frac{\nu+1}{2}}$	$\mathbb{E}(Y\|\mu,\sigma^2,\nu) = \mu$ für $\nu > 1$ $\mathrm{Var}(Y\|\mu,\sigma^2,\nu) = \sigma^2\frac{\nu}{\nu-2}$ für $\nu > 2$
Betaverteilung	$Y \sim \mathrm{Be}(a,b)$	$a,b > 0$	$y \in [0,1]$	$p(y\|a,b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} y^{a-1}(1-y)^{b-1}$	$\mathbb{E}(Y\|a,b) = \frac{a}{a+b}$ $\mathrm{Var}(Y\|a,b) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$ $\mathrm{mod}(Y\|a,b) = \frac{a-1}{a+b-2}$ für $a,b>1$
Gammaverteilung	$Y \sim \mathrm{Ga}(a,b)$	$a,b > 0$	$y > 0$	$p(y\|a,b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} y^{a-1}\exp(-by)$	$\mathbb{E}(Y\|a,b) = \frac{a}{b}$ $\mathrm{Var}(Y\|a,b) = \frac{a}{b^2}$ $\mathrm{mod}(Y\|a,b) = \frac{a-1}{b}$ für $a \geq 1$
Invers-Gammaverteilung	$Y \sim \mathrm{IG}(a,b)$	$a,b > 0$	$y > 0$	$p(y\|a,b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} y^{-a-1}\exp\big(-\frac{b}{y}\big)$	$\mathbb{E}(Y\|a,b) = \frac{b}{a-1}$ für $a>1$ $\mathrm{Var}(Y\|a,b) = \frac{b^2}{(a-1)^2(a-2)}$ für $a>2$ $\mathrm{mod}(Y\|a,b) = \frac{b}{a+1}$
Exponentialverteilung	$Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$	$\lambda > 0$	$y \geq 0$	$p(y\|\lambda) = \lambda\exp(-\lambda y)$	$\mathbb{E}(Y\|\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ $\mathrm{Var}(Y\|\lambda) = \frac{1}{\lambda^2}$

*s.p.d.: symmetrisch und positiv definit

Diskrete Verteilungen

Name	Symbol	Parameter	Definitions-bereich	Zähldichte	Kennzahlen
Diskrete Gleichverteilung	$Y \sim \mathrm{U}(\{y_1, ..., y_k\})$	-	$y \in \{y_1, ..., y_k\}$	$\mathbb{P}(Y = y_i) = \frac{1}{k},\ i = 1, \ldots, k$	- Für $y_i = i$ gilt: $\mathbb{E}(Y) = \frac{k+1}{2}, \mathrm{Var}(Y) = \frac{k^2-1}{12}$
Binomialverteilung	$Y \sim \mathrm{Bin}(n, \pi)$	$n \in \mathbb{N}$ $\pi \in [0, 1]$	$y \in \{0, \ldots, n\}$	$\mathbb{P}(Y = y\vert\pi) = \binom{n}{y}\pi^y(1-\pi)^{n-y}$	$\mathbb{E}(Y\vert\pi) = n\pi$ $\mathrm{Var}(Y\vert\pi) = n\pi(1-\pi)$
Poissonverteilung	$Y \sim \mathrm{Poi}(\mu)$	$\mu > 0$	$y \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{P}(Y = y\vert\mu) = \frac{\mu^y}{y!}\exp(-\mu)$	$\mathbb{E}(Y\vert\mu) = \mu$ $\mathrm{Var}(Y\vert\mu) = \mu$
Geometrische Verteilung	$Y \sim \mathrm{Geom}(\pi)$	$\pi \in [0, 1]$	$y \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{P}(Y = y\vert\pi) = \pi(1-\pi)^{y-1}$	$\mathbb{E}(Y\vert\pi) = \frac{1}{\pi}$ $\mathrm{Var}(Y\vert\pi) = \frac{1-\pi}{\pi^2}$
Negative Binomialverteilung	$Y \sim \mathrm{NegBin}(\alpha, \beta)$	$\alpha, \beta > 0$	$y \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{P}(Y = y\vert\alpha, \beta) = \binom{\alpha+y-1}{\alpha-1}\left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^\alpha\left(\frac{1}{\beta+1}\right)^y$	$\mathbb{E}(Y\vert\alpha, \beta) = \frac{\alpha}{\beta}$ $\mathrm{Var}(Y\vert\alpha, \beta) = \frac{\alpha}{\beta^2}(\beta+1)$

Zusammenhänge zwischen einzelnen Verteilungen

- $\log(Y) \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Y \sim \mathrm{LogN}(\mu, \sigma^2)$
- $Y\vert\theta \sim \mathrm{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{\theta}),\ \theta \sim \mathrm{Ga}(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}) \Rightarrow Y \sim t_\nu(\mu, \sigma^2)$.
- $Y \sim \mathrm{IG}(a, b) \Leftrightarrow Y^{-1} \sim \mathrm{Ga}(a, b)$