Aufgabe 1

Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Bemerkung aus dem Skript:

Bemerkung 11.13. *Es gelten folgende Implikationen für $p > q \geq 1$:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}^p\text{ - Konvergenz} & \Longrightarrow & \mathcal{L}^q\text{ - Konvergenz} \\ & & \Downarrow \\ \text{fast sichere Konvergenz} & \Longrightarrow & \text{stochastische Kovergenz} \\ & & \Downarrow \\ & & \text{schwache Konvergenz} \end{array}$$

Es ist ausreichend zu zeigen, dass aus der stochastischen Konvergenz die Konvergenz in Verteilungsfunktion (ein Spezialfall der schwachen Konvergenz) folgt.

Aufgabe 2

Beweisen Sie den folgenden Satz aus der Vorlesung:

Satz 11.16.
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise unkorrelierter Zufallsvariabler mit $\mathbb{E}(X_n) = 0$ und $\operatorname{Var}(X_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist zudem $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen, für welche gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{{a_n}^2} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}(X_i) = 0$$

so folgt

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \ ,$$

d.h. die Folge $\left(\frac{1}{a_n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert stochastisch gegen* 0.

Aufgabe 3

Es gelten die Voraussetzungen von Satz 11.16. Zeigen Sie, dass die Bedingung von Satz 11.16 mit $a_n = n$ erfüllt ist, wenn die Zufallsvariablen identisch verteilt sind.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass der Satz von de Moivre-Laplace (Satz 11.26 im Skript) ein Spezialfall des Satzes von Lindeberg-Feller (Satz 11.25 im Skript) ist.