Aufgabe 1

Bei einem Radrennen wird ein Doping-Test durchgeführt. Die Herstellerfirma gibt an, dass der Test zu 99.5% positiv ausfällt, falls ein Sportler gedopt ist. Ist ein Sportler nicht gedopt, so beträgt die Wahrscheinlichkeit für einen positiven Test 1%. Aus Erfahrung schätzt man, dass ein Viertel der Sportler gedopt ist.

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Sportler Dopingmittel verwendet hat, obwohl der Test negativ ausfällt?

Aufgabe 2

Der Datensatz `babyboom.dat` enthält die Geburtszeiten $t_1, \dots, t_n$ (Minuten ab Mitternacht) von $n = 44$ Kindern, die am 18. Dezember 1997 in Brisbane, Australien auf die Welt kamen. Die Zeiten x_i zwischen den Geburten, d.h.

$$x_i = t_i - t_{i-1}, \quad t_0 \stackrel{!}{=} 0$$

können als i.i.d. Realisierungen einer Zufallsvariable $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ mit unbekanntem Parameter $\lambda > 0$ modelliert werden.

(a) Wie lautet die Likelihoodfunktion von λ bezüglich der Stichprobe $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$?

(b) Bestimmen Sie den ML-Schätzer von λ zunächst allgemein und anschließend für den `babyboom`-Datensatz.

Aufgabe 3

Betrachten Sie das Poisson-Modell, d.h. sei $x \in \mathbb{N}_0$ die Realisierung einer Zufallsvariablen $X \sim \text{Poi}(\lambda)$. Für den Parameter λ wird eine $\text{Ga}(a, b)$-Priori-Verteilung angenommen.

(a) Berechnen sie die Posteriori-Verteilung $p(\lambda|x)$ explizit, d.h. inklusive Normierungskonstante.
Hinweis: $\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty z^{x-1} \exp(-z) \mathrm{d}z$.

(b) Warum genügt es, die Posteriori nur bis auf eine multiplikative Konstante zu bestimmen?

Aufgabe 4

Sei $x_1, \dots, x_n$ eine i.i.d.-Stichprobe von $X \sim \text{N}(\mu, \sigma^2)$ mit unbekanntem Mittelwert $\mu \in \mathbb{R}$ und bekannter Varianz $\sigma^2 > 0$. Für μ wird a priori eine $\text{N}(m, s)$-Verteilung angenommen.

Zeigen Sie, dass die Posteriori-Verteilung $p(\mu|x)$ gegeben ist durch $\text{N}(\tilde{m}, \tilde{s})$, wobei

$$\tilde{m} = \frac{s}{s + \frac{\sigma^2}{n}} \cdot \bar{x} + \frac{\frac{\sigma^2}{n}}{s + \frac{\sigma^2}{n}} \cdot m \qquad \text{und} \qquad \tilde{s} = \frac{s \frac{\sigma^2}{n}}{s + \frac{\sigma^2}{n}}$$

mit $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$ und $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$.

Hinweis: Quadratische Ergänzung.