Aufgabe 1

Seien $x_1, \ldots, x_n$ i.i.d. Realisierungen einer Zufallsgröße $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ mit bekanntem Mittelwert $\mu \in \mathbb{R}$ und unbekannter Varianz $\sigma^2 > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass die konjugierte Priori $p_K(\sigma^2)$ für σ^2 durch eine Invers-Gamma Verteilung (d.h. $\sigma^2 \sim \mathrm{IG}(a, b)$) gegeben ist und bestimmen sie die zugehörige Posteriori.

(b) Bestimmen Sie Jeffreys' Priori $p_J(\sigma^2)$. Handelt es sich hierbei um eine propere (eigentliche) Verteilung?

(c) Bestimmen Sie die Posteriori-Verteilung von $\sigma^2|x, \mu$, basierend auf Jeffreys' Priori $p_J(\sigma^2)$. Ist sie proper? Wenn ja, zu welcher Verteilungsfamilie gehört sie?

(d) Für welche Werte von a, b stimmen die Posteriori-Verteilungen für die verschiedenen Prioris überein? Sind diese Werte zulässig?

Aufgabe 2

Die Normalverteilung lässt sich alternativ auch über die Präzision $\kappa = \frac{1}{\sigma^2}$ statt über die Varianz σ^2 parametrisieren, d.h. $\mathrm{N}(\mu, \kappa^{-1})$. Die entsprechende Dichte ist gegeben durch

$$p(x) = \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}} \exp\left(\frac{1}{2}\kappa(x-\mu)^2\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Im Folgenden sei wieder der Mittelwert $\mu \in \mathbb{R}$ bekannt, $\kappa > 0$ unbekannt und $x_1, \ldots, x_n$ i.i.d. Realisierungen von $X \sim \mathrm{N}(\mu, \kappa^{-1})$. Für die Präzision werde folgende Priori angenommen

$$\kappa \sim \mathrm{Ga}(a, b).$$

(a) Zeigen Sie, dass die gewählte Priori für κ konjugiert ist.

Der Datensatz `r-jy-daily.dat` besteht aus täglichen logarithmierten Wechselkursgewinnen x_i des Yen zum Dollar, die annähernd als i.i.d. Realisierungen von X mit Mittelwert $\mu = 0$ betrachtet werden können.

(b) Ermitteln Sie eine (subjektive) Priori-Verteilung für κ, indem Sie die Priori-Parameter basierend auf den ersten $n_0 = 10$ Beobachtungen so wählen, dass

$$n_0 = 2a \quad \text{und} \quad \hat{\kappa}_{\mathrm{ML}} = \frac{a-1}{b},$$

d.h. sodass der Modus der Priori gerade dem ML-Schätzer $\hat{\kappa}_{\mathrm{ML}}$ entspricht.

Berechnen Sie die Posteriori-Verteilung anhand der restlichen Beobachtungen und stellen Sie Priori und Posteriori graphisch dar.

Hinweis: Für $\mu = 0$ gilt $\hat{\kappa}_{\mathrm{ML}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

(c) Berechnen Sie anhand der Posteriori einen (Bayesianischen) Schätzer für κ.