Aufgabe 1

Bezeichne $Y \sim \mathrm{N}(\mu, \kappa^{-1})$ die Temperatur in München (in °C) mit unbekanntem Erwartungswert $\mu \in \mathbb{R}$ und unbekannter Präzision $\kappa > 0$. Als Priori wird die Referenzprioriverteilung $p(\mu, \kappa) \propto \kappa^{-1}$ angenommen.

(a) Bestimmen Sie den Kern der gemeinsamen Posterioriverteilung von (μ, κ) für eine i.i.d.-Stichprobe $y = (y_1, \ldots, y_n)^\top,\ n \in \mathbb{N}$ von Y. Handelt es sich um eine bekannte Verteilung?

Im Abstand von einer Woche werden zwei Messwerte $y_1 = 15\,°\mathrm{C}$ und $y_2 = 20\,°\mathrm{C}$ erhoben.

(b) Schreiben Sie in `R` eine Funktion, die die nicht-normalisierte gemeinsame Posteriori-Dichte von (μ, κ) implementiert. Visualisieren Sie die Funktion für $\mu \in [10, 25]$ und $\kappa \in (0, \frac{1}{2}]$ für die gemessenen Werte $y = (y_1, y_2)$ z.B. mittels der Funktion `contour`.

(c) Zeigen Sie, dass für die marginale Posteriori von μ gilt

$$\mu | y \sim t_{n-1}\left(\bar{y}, \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2\right).$$

Hierbei bezeichnet $t_\nu(m, s^2)$ die nichtzentrale t-Verteilung, d.h.

$$Y \sim t_\nu(m, s^2) \;\Leftrightarrow\; X = \frac{Y - m}{s} \sim t_\nu \quad \text{und} \quad p_Y(y) \propto \left(1 + \frac{(y-m)^2}{\nu s^2}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}.$$

Hinweis: Es gilt $\sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 + n(\bar{y} - \mu)^2$.

(d) Visualisieren Sie die marginale Posterori von μ in `R`. Verwenden Sie dazu die in Moodle verfügbare Funktion `dNonCentralT` zur Berechnung der Dichte einer nichtzentralen t-Verteilung mit Parametern m, s und ν.

Aufgabe 2

(a) Begründen Sie, warum die Full conditionals für einen multivariaten Parametervektor $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_K)$ und Realisierungen $y = (y_1, \ldots, y_n)$ einer Zufallsvariable $Y \sim F_\theta$ allgemein proportional sind zur Posteriori, d.h.

$$p(\theta_k | \theta_{-k}, y) \propto p(\theta | y), \quad k = 1, \ldots, K$$

mit $\theta_{-k} = (\theta_1, \ldots, \theta_{k-1}, \theta_{k+1}, \ldots, \theta_K)$.

Bezeichne $Y \sim \mathrm{N}(\mu, \kappa^{-1})$ wie in Aufgabe 1 die Temperatur in München (in °C) mit unbekanntem Erwartungswert $\mu \in \mathbb{R}$ und unbekannter Präzision $\kappa > 0$. Als Priori wird die Referenzprioriverteilung $p(\mu, \kappa) \propto \kappa^{-1}$ angenommen.

(b) Bestimmen Sie die Full Conditionals

$$p\left(\mu|\kappa, y\right), \quad p\left(\kappa|\mu, y\right)$$

für die Parameter μ und κ und i.i.d. Realisierungen $y = (y_1, \ldots, y_n)$ von Y. Handelt es sich um bekannte Verteilungen?

Aufgabe 3

Wir betrachten das lineare Regressionsmodell

$$Y = X\beta + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I),\ \sigma^2 > 0$$

mit $X \in \mathbb{R}^{n\times p},\ \beta \in \mathbb{R}^p$ sowie $Y, \varepsilon \in \mathbb{R}^n$ aus Bayesianischer Sicht. Für die Verteilung der Zielgröße Y gilt nach Modellannahme

$$Y|\beta, \sigma^2 \sim N(X\beta, \sigma^2 I)$$

und als Priori für die Parameter β und σ^2 wird

$$\begin{aligned} \beta &\sim \mathrm{N}(\mu, P) \quad && \mu \in \mathbb{R}^p,\ P \in \mathbb{R}^{p\times p} \text{ s.p.d.} \\ \sigma^2 &\sim \mathrm{IG}(a, b) \quad && a, b > 0 \end{aligned}$$

angenommen.

(a) Stellen Sie die Posteriori-Verteilung $p(\beta, \sigma^2|Y)$ auf.

(b) Bestimmen Sie die Full Conditionals für β und σ^2. Liegen bekannte Verteilungen vor?
Hinweis: Verwenden Sie die binomische Formel bzw. quadratische Ergänzung für Vektoren/Matrizen:

$$\begin{aligned} (x+y)^\top A(x+y) &= x^\top Ax + 2x^\top Ay + y^\top Ay, \\ x^\top Ax + x^\top b + c &= \left(x + \frac{1}{2}A^{-1}b\right)^\top A\left(x + \frac{1}{2}A^{-1}b\right) - \frac{1}{4}b^\top A^{-1}b + c, \end{aligned}$$

mit $x, y, b, c \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, s.p.d.