

### Aufgabe 1

Betrachten Sie das Beta-Binomialmodell, d.h.  $X \sim \text{Bin}(n, \pi)$  mit  $n \in \mathbb{N}$  fest und  $\pi \sim \text{Be}(a, b)$ .

- (a) Geben Sie die Posteriori-Verteilung  $p(\pi|x)$  an.
- (b) Bestimmen Sie analytisch das erste und zweite Moment des Odds  $g(\pi) = \frac{\pi}{1-\pi}$ , d.h.

$$\mathbb{E}[g(\pi)|x], \quad k = 1, 2$$

und berechnen Sie daraus Posteriori-Erwartungswert und -Varianz des Odds.

*Hinweis:* Für  $z > 0$  gilt  $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$ .

- (c) Bestimmen Sie analytisch die Laplace-Approximation für das erste und zweite Moment des Odds.

In einer in Pauling (1971) beschriebenen Studie wird der Effekt von Vitamin C zur Vorbeugung von Erkältungen untersucht. Dabei wurde  $n = 139$  Skifahrern täglich eine Dosis von 1 g Vitamin C verabreicht. Während der Studienperiode erkrankten  $x = 17$  Studienteilnehmer an Erkältung. Anhand der Daten einer Placebo-Kontrollgruppe nimmt man für die Priori-Parameter  $a = 1.55$ ,  $b = 5.45$  an.

- (d) Verwenden Sie die in Moodle verfügbare Funktion `laplaceApprox`, um Posteriori-Erwartungswert und -Varianz des Odds für die konkrete Studie zu bestimmen. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit den wahren Werten aus Aufgabe (b).
- (e) Bestimmen Sie Posteriori-Erwartungswert und -Varianz mittels Monte-Carlo Integration, indem Sie  $N = 10^6$  mal aus der Posteriori ziehen und vergleichen Sie auch hier ihr Ergebnis mit den wahren Werten.