

# Formelsammlung zu Stochastische Prozesse

Stand: 18.04.2017

Diese Formelsammlung darf in den Klausuren verwendet werden. Sie darf durch handschriftliche Notizen und Formeln auf den Vorderseiten (**nicht** aber auf den leeren Rückseiten) ergänzt werden!

## 1 Einführung & Beispiele

### 1.1 Irrfahrten

- Eine Folge  $X = \{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ , mit  $X_t = X_{t-1} + Z_t$  und iid Folge  $\{Z_t, t \in \mathbb{N}\}$  heißt Irrfahrt auf der Geraden.
- Einfache Irrfahrt:  $Z_t \in \{-1, 0, 1\}$  mit  $P(Z_t = -1) = q$ ,  $P(Z_t = 0) = r$ ,  $P(Z_t = 1) = p$ .
- Gauß-Irrfahrt:  $\{Z_t, t \in \mathbb{N}\}$  iid  $N(0, \sigma^2)$ .

### 1.2 Autoregressive Prozesse

- Autoregressiver Prozess der Ordnung 1 ( $AR(1)$ )

$$X_t = \rho X_{t-1} + Z_t, \quad Z_t \text{ iid } (0, \sigma^2)$$

- Autoregressiver Prozess der Ordnung  $p$  ( $AR(p)$ )

$$X_t = \rho_1 X_{t-1} + \dots + \rho_p X_{t-p} + Z_t, \quad Z_t \text{ iid } (0, \sigma^2)$$

### 1.3 Moving-Average-Prozess

- Der stochastische Prozess  $X = \{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$  mit

$$X_t = \sum_{j=0}^q \theta_j Z_{t-j}, \quad Z_t \text{ iid } (0, \sigma^2)$$

heißt Moving-Average-Prozess (Prozess der gleitenden Durchschnitte) der Ordnung  $q$ .

## 1.4 Wiener-Prozess

- Ein stochastischer Prozess  $W = \{W(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ ,  $S = \mathbb{R}$ , heißt Wiener-Prozess, wenn gilt:

(W1) Die Zuwächse sind normalverteilt und stationär:

$$W(s+t) - W(s) \sim N(0, \sigma^2 t) \text{ für alle } s, t \geq 0.$$

(W2) Für alle  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ,  $n \geq 3$  sind die Zuwächse

$$W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$$

unabhängig.

(W3)  $W(0) = 0$ .

(W4) Die Pfade von  $W$  sind stetig.

- $(W(s), W(t))'$  ist für  $0 \leq s < t$  bivariat normalverteilt mit Dichte

$$f_{s,t}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{s(t-s)}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\frac{x_1^2}{s} + \frac{(x_2 - x_1)^2}{(t-s)}\right]\right\}.$$

- $(W(t_1), W(t_2), \dots, W(t_n))'$  ist für  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  multivariat normalverteilt mit Dichte

$$f_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\frac{x_1^2}{t_1} + \frac{(x_2 - x_1)^2}{t_2 - t_1} + \dots + \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{t_n - t_{n-1}}\right]\right\}}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n \sqrt{t_1(t_2 - t_1) \cdot \dots \cdot (t_n - t_{n-1})}}$$

und es gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(W(t_1), W(t_2), \dots, W(t_n)) &= 0 \\ \text{Cov}(W(t_1), W(t_2), \dots, W(t_n)) &= \sigma^2 \cdot \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & t_1 & \dots & t_1 & t_1 \\ t_1 & t_2 & t_2 & \dots & t_2 & t_2 \\ t_1 & t_2 & t_3 & \dots & t_3 & t_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_1 & t_2 & t_3 & \dots & t_n & t_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## 1.5 Poisson-Prozess

- Der Zählprozess  $N = \{N(t), t \geq 0\}$  heißt Poisson-Prozess, wenn gilt

(1)  $N$  hat unabhängige und stationäre Zuwächse, d.h.

$$\forall n \forall t_0 < t_1 < \dots < t_n \text{ sind } N(t_1) - N(t_0), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1}) \text{ unabhängig,}$$

$$\forall 0 \leq t_1 < t_2, s > 0 \text{ sind } N(t_2) - N(t_1) \text{ und } N(t_2 + s) - N(t_1 + s) \text{ identisch verteilt,}$$

(2) und

$$P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$$

$$P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda h + o(h)$$

- $N(t)$  ist Poisson-verteilt mit Rate  $\lambda t$ :

$$P(N(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp(-\lambda t), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

- Der Poisson-Prozess ist ein (homogener) MP mit

$$p_{ij}(t) = \begin{cases} \exp(-\lambda t) \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} & \text{für } i \leq j \\ 0 & \text{für } i > j. \end{cases}$$

- Die Zwischenzeiten  $T_n$  sind unabhängig und identisch exponentialverteilt mit Parameter  $\lambda$ :

$$P(T_n \leq t) = 1 - \exp(-\lambda t), \quad t \geq 0.$$

- Sei  $S_n = \sum_{i=1}^n T_i$  die Wartezeit auf das  $n$ -te Ereignis,  $n \geq 1$ ,  $S_0 = 0$ . Dann ist  $S_n$  Gamma-verteilt mit den Parametern  $n$ ,  $\lambda$ , d.h. für die Dichte gilt:

$$f_{S_n}(t) = \exp(-\lambda t) \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} \text{ für alle } t \geq 0.$$

- Für die Vorwärtsrekurrenzenzeiten  $V(t)$  und die Rückwärtsrekurrenzenzeiten  $U(t)$  gilt:

$$P(V(t) \leq x) = 1 - \exp(-\lambda x), \quad x \geq 0$$

$$P(U(t) = t) = \exp(-\lambda t)$$

$$P(U(t) \leq x) = 1 - \exp(-\lambda x), \quad 0 \leq x < t.$$

- Sind  $L = \{L(t), t \geq 0\}$  und  $M = \{M(t), t \geq 0\}$  zwei unabhängige Poisson-Prozesse mit Raten  $\lambda$  bzw.  $\mu$ , so ist die Überlagerung von  $L$  und  $M$

$$N(t, \omega) = L(t, \omega) + M(t, \omega)$$

ein Poisson-Prozess mit Rate  $\lambda + \mu$ .

- Es sei  $N$  ein Poisson-Prozess mit Rate  $\lambda$ . Bei Eintritt eines Ereignisses wird ein binomisches Experiment  $X$  mit  $P(X = 1) = p$  und  $P(X = 0) = 1 - p$  unabhängig von  $N$ , durchgeführt. Für die Zählprozesse  $M$  und  $L$  der Typ-1 bzw. Typ-0 Ereignisse gilt:  $M$  und  $L$  sind unabhängige Poisson-Prozesse mit Raten  $p\lambda$  und  $(1-p)\lambda$ .

- Ein Zählprozess  $N = \{N(t), t \geq 0\}$  heißt inhomogener Poisson-Prozess mit Rate  $\lambda(t)$ ,  $t \geq 0$ , wenn gilt

(1)  $N$  hat unabhängige Zuwächse,

(2)  $P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$ ,

$$P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h).$$

- Für einen inhomogenen Poisson-Prozess gilt

$$N(t+s) - N(t) \sim Po(\Lambda(t+s) - \Lambda(t))$$

mit der kumulierten Rate  $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du$ .

- Ist  $N$  ein Poisson-Prozess und  $\{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$  eine von  $N$  unabhängige iid Folge, so heißt

$X = \{X(t), t \geq 0\}$  mit  $X(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n$  bewerteteter (compound) Poisson-Prozess.

## 2 Grundbegriffe der allgemeinen Theorie

### 2.1 Definition und endlich-dimensionale Verteilungen

- Ein stochastischer Prozess (SP) ist das Quadrupel  $X = (\Omega, \mathcal{F}, P, \{X_t, t \in T\})$ .  $T$  heißt Parameterraum,  $S$  Zustandsraum von  $X$ .
- Sei  $X$  SP und sei  $\{t_1, \dots, t_n, n \in \mathbb{N}\} \subset T$  beliebig. Dann heißen

$$P_{t_1, \dots, t_n}(B_1 \times \dots \times B_n) = P(X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_n} \in B_n)$$

endlich-dimensionale Verteilungen des SP  $X$ .

- Für reelle ZV heißen

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n)$$

endlich-dimensionale Verteilungsfunktionen des SP  $X$ .

- Die Menge aller endlich-dimensionalen Verteilungsfunktionen heißt die Familie der endlich-dimensionalen Verteilungsfunktionen.
- Endlich-dimensionale Verteilungsfunktionen (von SPen) erfüllen die folgenden Verträglichkeitsbedingungen (Konsistenzbedingungen):
  - (a) Für jede Permutation  $k_1, \dots, k_n$  von  $1, \dots, n$  gilt:
 
$$F_{t_{k_1}, \dots, t_{k_n}}(x_{k_1}, \dots, x_{k_n}) = F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n).$$
  - (b) Für alle  $1 \leq k < n$  und  $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$  gilt:
 
$$F_{t_1, \dots, t_k}(x_1, \dots, x_k) = F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_k, \infty, \dots, \infty).$$
- Eine endlich-dimensionale Verteilungsfamilie heißt konsistent:  $\Leftrightarrow$  (a) und (b) gelten.
- Für jedes (feste)  $\omega \in \Omega$  heißt die Funktion  $X(\omega) : T \rightarrow S$ ,  $t \mapsto X_t(\omega)$  Pfad, Trajektorie oder Realisierung des stochastischen Prozesses  $X$ .
- Existenzsatz von Kolmogorov: Sei  $\{F_{t_1, \dots, t_n}\}$  (bzw.  $\{P_{t_1, \dots, t_n}\}$ ) ein konsistentes System von endlich-dimensionalen Verteilungsfunktionen (bzw. Verteilungen). Dann existieren ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  und ein stochastischer Prozess  $X = (\Omega, \mathcal{F}, P, \{X_t, t \in T\})$  mit  $F_{t_1, \dots, t_n}$  als System von endlich-dimensionalen Verteilungsfunktionen, d.h.

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n).$$

### 2.2 Äquivalenzbegriffe

- $X$  und  $Y$  heißen verteilungsäquivalent (schwach äquivalent):
  - $\Leftrightarrow$  Die endlich-dimensionalen Verteilungen von  $X$  und  $Y$  sind gleich.
  - $\Leftrightarrow \forall \{t_1, \dots, t_n\} \subset T, \{B_1, \dots, B_n\} \subset S, n \in \mathbb{N}$  gilt

$$P(X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_n} \in B_n) = P(Y_{t_1} \in B_1, \dots, Y_{t_n} \in B_n).$$

- $X$  und  $Y$  heißen äquivalent ( $Y$  ist „Version“ von  $X$ ):  $\Leftrightarrow P(X_t = Y_t) = 1, \quad \forall t \in T$
- $X$  und  $Y$  heißen ununterscheidbar:
  - $\Leftrightarrow X$  und  $Y$  haben mit Wahrscheinlichkeit 1 gleiche Pfade.
  - $\Leftrightarrow P\{X_t = Y_t \dots \forall t \in T\} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad P(\{\omega : X(\omega) = Y(\omega)\}) = 1$

- $X, Y$  ununterscheidbar  $\Rightarrow$  äquivalent  $\Rightarrow$  verteilungsäquivalent.
- Falls  $T$  abzählbar:  $X, Y$  ununterscheidbar  $\Leftrightarrow$  äquivalent.

### 2.3 Stetigkeitsbegriffe

- $X$  heißt (fast sicher) pfadstetig:

$$\Leftrightarrow P(\omega : \lim_{s \rightarrow t} X(s, \omega) = X(t, \omega) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+) = 1$$

$$\Leftrightarrow P(\lim_{s \rightarrow t} X(s) = X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+) = 1$$

- $X$  heißt (fast sicher) stetig:  $\Leftrightarrow P(\omega : \lim_{s \rightarrow t} X(s, \omega) = X(t, \omega)) = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$
- $X$  heißt stochastisch stetig:

$$\Leftrightarrow \lim_{s \rightarrow t} P(\omega : |X(s, \omega) - X(t, \omega)| > \epsilon) = 0, \quad \forall \epsilon > 0, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

$$\Leftrightarrow p - \lim_{s \rightarrow t} X(s) = X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

- $X, Y$  äquivalent und  $X, Y$  fast sicher pfad-rechtsstetig  $\Rightarrow X, Y$  ununterscheidbar.

### 2.4 Stationarität

- Ein stochastischer Prozess  $X$  heißt streng stationär:

$$\Leftrightarrow F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{t_1+h, \dots, t_n+h}(x_1, \dots, x_n), \quad \forall n, t_1, \dots, t_n, h.$$

- (Auto-)Kovarianzfunktion:

$$\gamma(h) = \text{Cov}(X_{t+h}, X_t) = \text{Cov}(X_h, X_0), \quad h \geq 0.$$

- Autokorrelationsfunktion:

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \frac{\gamma(h)}{\sigma^2} \quad h \geq 0.$$

- Ein stochastischer Prozess  $X$  heißt schwach stationär:

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}(X_t) = \mu, \quad \text{Cov}(X_t, X_s) = \gamma(t - s)$$

### 3 Markov-Ketten

#### 3.1 Grundlegende Eigenschaften

- Der stochastische Prozess  $X = \{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ ,  $S$  diskret, heißt Markov-Kette 1. Ordnung  $:\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{N}_0; j, i, i_{t-1}, \dots, i_0 \in S$

$$P(X_{t+1} = j | X_t = i, X_{t-1} = i_{t-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{t+1} = j | X_t = i)$$

- $p_{ij}(t) = P(X_{t+1} = j | X_t = i)$  heißt (einschrittige) Übergangswahrscheinlichkeit (ÜW) von  $i$  nach  $j$  (zum Zeitpunkt  $t$ ).
- Eine Markov-Kette heißt homogen, falls  $p_{ij}(t) = p_{ij}$  für alle  $t \in \mathbb{N}_0$  gilt.
- Für homogene MK heißt die Matrix  $P = (p_{ij}), i, j \in S$  Übergangsmatrix.
- $p_i(0) := P(X_0 = i)$ ,  $i \in S$  heißt Anfangsverteilung,  $p_i(t) := P(X_t = i)$ ,  $i \in S$  heißt Zustandswahrscheinlichkeit.
- $p_{ij}^{(t)} := P(X_{t+s} = j | X_s = i) = P(X_t = j | X_0 = i)$ ,  $t \geq 1$  heißt  $t$ -schrittige Übergangswahrscheinlichkeit von  $i$  nach  $j$ .
- Für die  $t$ -schrittigen ÜW gelten die Chapman-Kolmogorov-Gleichungen:  $\forall t, s \in \mathbb{N}_0$

$$p_{ij}^{(t+s)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(s)} p_{kj}^{(t)}.$$

- Mit den  $t$ -schrittigen Übergangsmatrizen

$$(p_{ij}^{(t)}) = P^t \quad (t\text{-te Potenz von } P)$$

lauten die Chapman-Kolmogorov-Gleichungen in Matrixform

$$P^{t+s} = P^s P^t.$$

- Sei der Zeilenvektor  $p(t) = (p_i(t))$  die Zustandsverteilung (für  $t = 0$  die Anfangsverteilung). Dann gilt für alle  $j \in S$ :

$$p_j(t) = \sum_{i \in S} p_i(0) p_{ij}^{(t)},$$

bzw. in Matrixschreibweise  $p(t) = p(0)P^t$ .

- Der stochastische Prozess  $X = \{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ ,  $S$  diskret, heißt Markov-Kette  $p$ -ter Ordnung  $:\Leftrightarrow \forall i_0, i_1, \dots, i_{t+1}, t \geq p + 1$

$$\begin{aligned} P(X_{t+1} = i_{t+1} | X_t = i_t, \dots, X_{t-p+1} = i_{t-p+1}, \dots, X_0 = i_0) \\ = P(X_{t+1} = i_{t+1} | X_t = i_t, \dots, X_{t-p+1} = i_{t-p+1}) \end{aligned}$$

### 3.2 Klassifizierung von Zuständen und Rückkehrverhalten

- Der Zustand  $j$  heißt von  $i$  aus erreichbar ( $i \rightarrow j$ ):  $\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{N}_0$  mit  $p_{ij}^{(t)} > 0$ .
- Die Zustände  $i$  und  $j$  heißen wechselseitig erreichbar ( $i \leftrightarrow j$ ):  $\Leftrightarrow i \rightarrow j$  und  $j \rightarrow i$ .
- $i \leftrightarrow j$  ist eine Äquivalenzrelation, d.h. die Menge aller Zustände lässt sich zerlegen in Äquivalenzklassen wechselseitig erreichbarer Zustände.
- Klassifizierung nach Erreichbarkeit:  
Sei  $S$  die Menge aller Zustände,  $C \subset S$  eine Teilmenge von  $S$  und  $i \in S$  ein Zustand.

1.  $C$  heißt abgeschlossen:  $\Leftrightarrow$  Kein Zustand in  $S \setminus C$  ist von  $C$  aus erreichbar.
2.  $C$  heißt offen:  $\Leftrightarrow C$  ist nicht abgeschlossen.
3. Ein Zustand  $i$  heißt absorbierend:  $\Leftrightarrow \{i\}$  abgeschlossen  $\Leftrightarrow p_{ii} = 1$
4. Eine abgeschlossene Menge  $C$  heißt irreduzibel:  $\Leftrightarrow$  Keine echte Teilmenge von  $C$  ist abgeschlossen, d.h. alle Zustände in  $C$  sind wechselseitig erreichbar.
5. Eine Markov-Kette heißt irreduzibel  $\Leftrightarrow S$  irreduzibel  $\Leftrightarrow$  Alle Zustände sind wechselseitig erreichbar.

- Klassifizierung nach Rückkehrverhalten:

Die MK sei für  $t = 0$  in  $i$ . Es sei  $T_{ii}$  die Zeit bis zur ersten Rückkehr nach  $i$  und  $E(T_{ii}) = \mu_{ii}$  die erwartete Rückkehrzeit.

1.  $i \in S$  heißt rekurrent:  $\Leftrightarrow P(T_{ii} < \infty | X_0 = i) = 1$ .
2.  $i \in S$  heißt transient:  $\Leftrightarrow P(T_{ii} < \infty | X_0 = i) < 1$ .
3. Bei rekurrenten Zuständen kann man unterscheiden:

$i$  heißt positiv-rekurrent :  $\Leftrightarrow \mu_{ii} < \infty$ .

$i$  heißt null-rekurrent :  $\Leftrightarrow \mu_{ii} = \infty$ .

4.  $i$  heißt periodisch mit Periode  $d := d \geq 2$  größte natürliche Zahl mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(T_{ii} = nd | X_0 = i) + P(T_{ii} = \infty | X_0 = i) = 1.$$

$i$  heißt aperiodisch für  $d = 1$  (bzw.  $d = \infty$ ).

5.  $i$  heißt ergodisch:  $\Leftrightarrow i$  ist positiv-rekurrent und aperiodisch.

- Rekurrenz, Transienz, Periodizität und Ergodizität sind Klasseneigenschaften.
- $i$  rekurrent und  $i \rightarrow j \Rightarrow i \leftrightarrow j$  und auch  $j$  rekurrent.
- $i$  rekurrent  $\Rightarrow$  Es existiert eine irreduzible Klasse  $C(i)$  von rekurrenten Zuständen mit  $i \in C(i)$ .
- Kanonische Repräsentation:  
 $S$  lässt sich zerlegen in irreduzible Teilmengen  $C_1, C_2, \dots$  und eine Restmenge  $T$  transienter Zustände. Seien nach evtl. Umnummerierung  $P_1, P_2, \dots, Q$  die dazugehörigen Teilmatrizen der Übergangsmatrix  $P$ , so gilt

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ L_1 & L_2 & \cdots & \cdots & Q \end{pmatrix}$$

- Ist  $C$  eine irreduzible, endliche Klasse, so sind alle Zustände positiv-rekurrent.
- Ist  $C$  eine endliche Klasse, so gilt

$$\begin{aligned} C \text{ rekurrent} &\Leftrightarrow C \text{ abgeschlossen} \\ C \text{ transient} &\Leftrightarrow C \text{ offen} \end{aligned}$$

- Ist die Markov-Kette endlich, so existiert mindestens eine rekurrente Klasse.

### 3.3 Grenzverhalten homogener Markov-Ketten

- Ist  $j$  transient oder null-rekurrent, so gilt

$$\forall i \in S \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}^{(t)} = 0.$$

Ist  $j$  positiv-rekurrent und aperiodisch, so gilt

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} p_{jj}^{(t)} &= \frac{1}{\mu_{jj}} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}^{(t)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} p_{jj}^{(t)} \quad \forall i \text{ mit } i \leftrightarrow j \\ \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}^{(t)} &= f_{ij} \frac{1}{\mu_{jj}} =: l_{ij}^{(\infty)} \quad \forall i \in S \end{aligned}$$

Dabei ist  $f_{ij}$  die Wahrscheinlichkeit in endlicher Zeit von  $i$  nach  $j$  zu gelangen.

- In der kanonischen Repräsentation ergibt sich folgende Blockgestalt:

$$P^\infty = \begin{pmatrix} P_1^\infty & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & P_2^\infty & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \ddots & 0 \\ L_1^\infty & L_2^\infty & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

- Grenzwertsatz: Für eine irreduzible, aperiodische Markov-Kette mit positiv rekurrenten Zuständen besitzt das lineare Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} \pi_j &= \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij}, \quad j \in S \\ \sum_{j \in S} \pi_j &= 1 \end{aligned} \right\} \text{ bzw. } \begin{cases} \pi &= \pi P \\ \pi \mathbf{1} &= 1 \end{cases}$$

mit Zeilenvektor  $\pi = (\dots, \pi_j, \dots)$ ,  $j \in S$  und  $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)'$  eine eindeutige, strikt positive Lösung und es gilt

$$\pi_j = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}^{(t)} = \frac{1}{\mu_{jj}},$$

sowie

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} p(0)P^t = p(0)P^\infty = \pi$$

für jede beliebige Anfangsverteilung  $p(0)$ .

### 3.4 Instationäre und inhomogene Markov-Ketten 1. Ordnung

- Modell für (binäre) Zeitreihendaten  $\{Y_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ :  $p_{ij}(t) = P(Y_{t+1} = j | Y_t = i), \quad i, j \in \{0, 1\}$
- Modell für Longitudinaldaten  $\{Y_{nt}, t \in \mathbb{N}_0\}, n = 1, \dots, N$  mit Kovariablen  $\{z_{nt}, t \in \mathbb{N}_0\}$ :  
 $p_{ij,n}(t) = P(Y_{n,t+1} = j | Y_{nt} = i, z_{nt})$
- Separate Modellierung der Übergangswahrscheinlichkeiten:

$$p_{01,n}(t) = h(w'_{nt}\beta_0) \quad p_{11,n}(t) = h(z'_{nt}\beta_1)$$

$h$  ist die Responsefunktion  $h : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ . Für  $h(x) = \exp(x)/(1 + \exp(x))$  bzw.  $h(x) = \phi(x)$  erhält man das Logit- bzw. das Probitmodell. Die Kovariablenvektoren  $w_{nt}, z_{nt}$  können identisch sein.

- Konditionale Modellierung: Simultanes, autoregressives Modell mit  $Y_t$  als Kovariable  
Beispiele:

$$\log \left( \frac{P(Y_{t+1} = 1 | Y_t, w_t)}{P(Y_{t+1} = 0 | Y_t, w_t)} \right) = w'_t \beta + Y_t \alpha \quad (\text{additiv})$$

$$\log \left( \frac{P(Y_{t+1} = 1 | Y_t, w_t)}{P(Y_{t+1} = 0 | Y_t, w_t)} \right) = w'_t \beta + Y_t w'_t \alpha \quad (\text{mit Interaktion})$$

### 3.5 Statistische Inferenz bei Markov-Ketten

- Allgemein: Daten  $(x_0), x_1, \dots, x_T$  werden aufgefasst als Realisierungen  $x_0 = X_0(\omega), x_1 = X_1(\omega), \dots, x_t = X_t(\omega), \dots, x_T = X_T(\omega)$  eines stochastischen Prozesses  $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ .
- Allgemeine Likelihood(funktion):

$$L(\theta | X) := f(x_0, \dots, x_T | \theta)$$

ist gemeinsame Dichte von  $X_0, \dots, X_T$ , ausgewertet an  $x_0, \dots, x_T$ , wird als Funktion vom unbekanntem Parameter  $\theta$  betrachtet.

- Likelihood bei Markov-Ketten:

$$L(\theta | X) = \prod_{t=1}^T f_t(x_t | x_{t-1}, \theta) f_0(x_0 | \theta)$$

Für homogene Markov-Ketten entfällt der Index  $t$  bei  $f_t$ .

- Bei Beobachtung mehrerer unabhängiger Pfade eines SP werden die Daten  $x_{n0}, \dots, x_{nT}, n = 1, \dots, N$  aufgefasst als unabhängige Realisierungen  $x_{n0} = X_0(\omega_n), \dots, x_{nT} = X_T(\omega_n)$  des Prozesses  $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ . Gemeinsame Dichte und die Likelihood ergeben sich als

$$L(\theta | X) = \prod_{n=1}^N f(x_{nT}, \dots, x_{n0} | \theta) = \prod_{n=1}^N \prod_{t=1}^T f_t(x_{nt} | x_{n,t-1}, \theta) f_0(x_{n0} | \theta) .$$

- Sei  $X$  eine homogene Markov-Kette mit endlichem Zustandsraum  $S = \{1, \dots, m\}$ . Unbekannte Parameter:  $P = (p_{ij})$  und  $p(0)$

- Likelihood für einen beobachteten Pfad  $X_0(\omega) = i_0, X_1(\omega) = i_1, \dots, X_T(\omega) = i_T$ :

$$L(p(0), P) = P\{X_0 = i_0, \dots, X_T = i_T\} = p_{i_0}(0)p_{i_0 i_1} \cdot \dots \cdot p_{i_{T-1} i_T}$$

- Bedingte Likelihood:  $L(P) = \prod_{i,j} p_{ij}^{n_{ij}}$

- ML-Schätzer:  $\hat{p}_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_i}$  mit

$n_{ij}$  Anzahl der beobachteten Übergänge von  $i$  nach  $j$

$n_i$  Anzahl der Übergänge weg von  $i$

- Bei ergodischen Markov-Ketten gilt für  $T \rightarrow \infty$

$$\hat{p}_{ij} \stackrel{a}{\sim} N\left(p_{ij}, \frac{\hat{p}_{ij}(1 - \hat{p}_{ij})}{n_i}\right).$$

- Bei mehreren beobachteten Pfaden lassen sich auch Übergangswahrscheinlichkeiten  $p_{ij}(t)$  für den inhomogenen Fall schätzen:  $\hat{p}_{ij}(t) = \frac{n_{ij}(t)}{n_i(t)}$  mit

$n_{ij}(t)$  Anzahl der Übergänge von  $i$  nach  $j$  mit  $X_t = i$  und  $X_{t+1} = j$

$n_i(t)$  Anzahl der Beobachtungen mit  $X_t = i$

- Likelihood-Quotienten-Tests für homogene Markov-Ketten:

Zum Test von Hypothesen  $H_0$  versus  $H_1$ , z.B.

$H_0 : \{X_t\}$  ist i.i.d.,

$H_1 : \{X_t\}$  ist Markov-Kette 1. Ordnung

$H_0 : \{X_t\}$  ist Markov-Kette 1. Ordnung,  $H_1 : \{X_t\}$  ist Markov-Kette 2. Ordnung

kann der Likelihood-Quotienten-Test verwendet werden:

$l(\hat{\theta}_1)$  maximierte Loglikelihood im  $H_1$ -Modell

$l(\hat{\theta}_0)$  maximierte Loglikelihood im  $H_0$ -Modell

Unter  $H_0$  gilt:

$$2(l(\hat{\theta}_1) - l(\hat{\theta}_0)) \stackrel{a}{\sim} \chi^2(r), \quad T \rightarrow \infty$$

mit  $r$ =Differenz der Anzahl der geschätzten Parameter in  $H_0$ - und  $H_1$ -Modell.

### 3.6 Allgemeine Markov-Ketten

- Eine Markov-Kette ist ein stochastischer Prozess  $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$  mit Zustandsraum  $S$ , der die Markov-Eigenschaft

$$P(X_{t+1} \in A | X_t = x, X_{t-1} \in A_{t-1}, \dots, X_0 \in A_0) = P(X_{t+1} \in A | X_t = x)$$

für beliebige  $x \in S$  und  $A, A_{t-1}, \dots, A_0 \in \mathcal{S}$  erfüllt. Die Markov-Kette heißt homogen, falls die Übergangswahrscheinlichkeiten nicht von  $t$  abhängen.

- $P(x, A) := P(X_{t+1} \in A | X_t = x) = P(X_1 \in A | X_0 = x)$  heißt Übergangskern der homogenen Markov-Kette.
- Eine Verteilung  $\pi^*$  auf  $(S, \mathcal{S})$  mit Dichte  $\pi$  (bezüglich des dominierenden Maßes  $\mu$ ) heißt invariante Verteilung für den Übergangskern  $P(x, A)$ , wenn für alle  $A \in \mathcal{S}$  gilt

$$\pi^*(A) = \int P(x, A)\pi(x)dx.$$

- Eine Markov-Kette mit invarianter Verteilung  $\pi^*$  heißt irreduzibel, wenn sie positive Wahrscheinlichkeiten besitzt, von einem beliebigen Startpunkt  $x_0$  aus jede Menge  $A$  zu erreichen, für die  $\pi^*(A) > 0$  gilt.
- Eine Markov-Kette heißt periodisch, wenn sie Teile des Zustandsraums nur in einer bestimmten Reihenfolge erreichen kann; andernfalls heißt die Markov-Kette aperiodisch.
- Grenzwertsatz: Sei  $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$  eine irreduzible, aperiodische Markov-Kette mit Übergangskern  $P$  und invarianter Verteilung  $\pi^*$ . Dann ist  $\pi^*$  eindeutig bestimmt und es gilt

$$\|P^t(x, \cdot) - \pi^*\| \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty,$$

wobei

$$\|P^t(x, \cdot) - \pi^*\| = 2 \sup_{A \in \mathcal{S}} |P^t(x, A) - \pi^*(A)|.$$

## 4 Diskrete Markov-Prozesse

### 4.1 Definition und elementare Eigenschaften

- Ein stochastischer Prozess  $X = \{X(t), t \geq 0\}$  mit abzählbarem Zustandsraum heißt diskreter Markov-Prozess (MP), wenn  $\forall n \geq 0, \forall t \geq s > s_n > \dots > s_0 \geq 0, j, i, i_n, \dots, i_0 \in S$  gilt

$$P(X(t) = j | X(s) = i, X(s_n) = i_n, \dots, X(s_0) = i_0) = P(X(t) = j | X(s) = i).$$

- $p_{ij}(s, t) := P(X(t) = j | X(s) = i)$  heißt Übergangswahrscheinlichkeit(-sfunktion).
- $P(s, t) = (p_{ij}(s, t))$  heißt Übergangsmatrix.
- Ein Markov-Prozess heißt homogen (oder besitzt stationäre Übergangswahrscheinlichkeiten):

$$\Leftrightarrow P(X(t+s) = j | X(s) = i) = P(X(t) = j | X(0) = i) = p_{ij}(0, t) =: p_{ij}(t).$$

- Für die Übergangswahrscheinlichkeiten gilt

$$p_{ij}(s+t) = \sum_{k \in S} p_{ik}(s) p_{kj}(t) \quad \text{bzw.} \quad P(s+t) = P(s)P(t)$$

- Gemeinsame Verteilung:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \in \mathbb{R}_+, \quad i_0, i_1, \dots, i_n \in S$  gilt

$$P(X(t_n) = i_n, \dots, X(t_1) = i_1 | X(t_0) = i_0) = p_{i_0 i_1}(t_1 - t_0) \cdot \dots \cdot p_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1}).$$

- Voraussetzung (im Folgenden):

$$p_{ij}(0) = \lim_{h \downarrow 0} p_{ij}(h) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

- Für  $i, j \in S, i \neq j$ , heißt

$$\lambda_{ij} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{p_{ij}(h)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{P(X(t+h) = j | X(t) = i)}{h}$$

Übergangsintensität bzw. -rate von  $i$  nach  $j$ . Für  $i = j$  definieren wir

$$\lambda_{ii} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{p_{ii}(h) - p_{ii}(0)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{p_{ii}(h) - 1}{h}.$$

Zusammenfassend gilt für  $i, j \in S$

$$\lambda_{ij} = p'_{ij}(0) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{p_{ij}(h) - p_{ij}(0)}{h}$$

mit  $0 \leq \lambda_{ij} < \infty$  für  $i \neq j$ , aber  $\lambda_{ii} \leq 0$ .

- $\Lambda = (\lambda_{ij})$  heißt Intensitätsmatrix.
- In  $o(h)$ -Schreibweise gilt also für  $i \neq j$

$$\begin{aligned} p_{ij}(h) &= P(X(t+h) = j | X(t) = i) = \lambda_{ij}h + o(h), \\ p_{ii}(h) &= 1 + \lambda_{ii}h + o(h). \end{aligned}$$

## 4.2 Geburts- und Todesprozesse

- Ein stochastischer Prozess  $X = \{X(t), t \geq 0\}$  mit Zustandsraum  $S \subset \mathbb{N}_0$  heißt Geburtsprozess:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow p_{i,i+1}(h) &= \lambda_i h + o(h), \\ p_{i,i}(h) &= 1 - \lambda_i h + o(h), \quad \lambda_i \geq 0 \quad i \geq i_0 \\ p_{i,j}(h) &= \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq j \leq i-1 \\ o(h) & , \quad j \geq i+2 \end{cases} \end{aligned}$$

- Dann gilt: Die Verweildauern  $T_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , sind unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter  $\lambda_i$ , d.h. für  $Y_{n-1} = i$  gilt

$$T_n \sim \text{Exp}(\lambda_i).$$

- Ein stochastischer Prozess  $X = \{X(t), t \geq 0\}$  mit Zustandsraum  $S \subset \mathbb{N}_0$  heißt Geburts- und Todesprozess:  $\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} p_{i,i+1}(h) &= \lambda_i h + o(h) & i \geq 0 \\ p_{i,i-1}(h) &= \mu_i h + o(h) & i \geq 1 \\ p_{ii}(h) &= 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h) & i \geq 0 \\ p_{ij}(h) &= o(h) & |i-j| \geq 2, \quad i, j \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{mit} \quad \mu_0 &= 0 \\ \lambda_0 &> 0 \quad (> 0 \text{ „reflektierend“}, = \text{ „absorbierend“}), \\ &(\text{=}) \\ \mu_i, \lambda_i &\geq 0 \quad \text{für } i \geq 1 \end{aligned}$$

- Für die Intensitäten eines Geburts- und Todesprozesses gilt

$$\begin{aligned} \lambda_{i,i+1} &= \lambda_i \\ \lambda_{i,i-1} &= \mu_i \\ \lambda_{ij} &= 0 \quad \text{für } |i-j| \geq 2 \\ \lambda_{ii} &= -(\lambda_i + \mu_i) \end{aligned}$$

## 4.3 Allgemeine Theorie

- Bezeichne

$S_n$  den Zeitpunkt der  $n$ -ten Zustandsänderung,  $S_0 = 0$ ,

$Y_n = X(S_n)$  den zum Zeitpunkt  $S_n$  angenommenen Zustand,

$T_{n+1} = S_{n+1} - S_n$  die Verweildauer in  $Y_n$ ;  $S_{n+1} = S_n + T_{n+1}$ .

- Die Verweildauern  $T_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  sind exponentialverteilt mit Parameter  $\lambda_i$ , sodass gilt  $T_n | Y_{n-1} = i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$ . Für die Vorwärtsrekurrenzzeit  $V(t)$  gilt

$$P(V(t) \leq s | X(t) = i) = 1 - e^{-\lambda_i s} \quad , \quad s \geq 0,$$

$V(t)$  ist also ebenfalls exponentialverteilt mit Parameter  $\lambda_i$ .

- Ein Zustand  $i$  heißt

$$\begin{aligned} \text{absorbierend:} &\Leftrightarrow \lambda_i = 0, \\ \text{stabil:} &\Leftrightarrow 0 < \lambda_i < \infty, \\ \text{instabil:} &\Leftrightarrow \lambda_i = \infty. \end{aligned}$$

- Sei  $X$  ein Markov-Prozess mit rechtsseitig stetigen Pfaden. Dann gilt  $\forall n \in \mathbb{N}_0, \forall j, i, \dots, i_0 \in S, \forall t, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}, \forall 0 < s_1 \dots < s_n$

1.  $P(Y_{n+1} = j, T_{n+1} > t \mid Y_n = i, \dots, Y_0 = i_0, S_n = s_n, \dots, s_0 = 0) = q_{ij} e^{-\lambda_i t}$

$$\text{mit } q_{ij} \geq 0, \sum_{j \in S} q_{ij} = 1, q_{ii} = \begin{cases} 0, & i \text{ stabil} \\ 1, & i \text{ absorbierend} \end{cases}$$

2.  $\{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$  ist eine Markov-Kette mit Übergangsmatrix  $Q = (q_{ij})$

3.  $P(T_{n+1} > t \mid Y_n = i, Y_{n+1} = j) = P(T_{n+1} > t \mid Y_n = i) = e^{-\lambda_i t}$

4.  $P(T_1 > t_1, \dots, T_n > t_n \mid Y_n = i, \dots, Y_0 = i_0) = e^{-\lambda_{i_0} t_1} \dots e^{-\lambda_{i_{n-1}} t_n}$

- Ein Markov-Prozess heißt regulär, wenn er die folgenden Eigenschaften besitzt:

1.  $p_{ij}(0) = \lim_{h \downarrow 0} p_{ij}(h) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$

2. Pfade (mit Wahrscheinlichkeit 1) rechtsseitig stetig.

3.  $\sup_n S_n = +\infty$ .

- Regularitätskriterien: Ein Markov-Prozess, der die Eigenschaften 1. und 2. erfüllt, ist regulär, falls eine der folgenden Eigenschaften gilt:

1.  $S$  ist endlich.

2.  $\lambda_i \leq c$  für alle  $i \in S$ .

3. Alle Zustände der eingebetteten Markov-Kette  $Y$  sind rekurrent.

4. Die Markov-Kette  $Y$  verbleibt mit Wahrscheinlichkeit 0 in einer transienten Klasse.

- Ist  $X$  ein regulärer Markov-Prozess, dann sind die Übergangswahrscheinlichkeiten stetig differenzierbar und es gilt

$$p'_{ij}(0) = \lambda_{ij} = \begin{cases} -\lambda_i & , i = j \\ \lambda_i q_{ij} & , i \neq j \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ll} P(X(h) = i \mid X(0) = i) & = 1 - \lambda_i \cdot h + o(h) & i = j \\ P(X(h) = j \mid X(0) = i) & = \lambda_i q_{ij} \cdot h + o(h) & i \neq j. \end{array}$$

- Für einen regulären Markov-Prozess  $X$  ist die Übergangsmatrix  $P(t) = (p_{ij}(t))$  durch die Übergangsmatrix  $Q$  der eingebetteten Markov-Kette  $Y$  und die Intensitätsmatrix  $\Lambda$  eindeutig bestimmt. Die Übergangswahrscheinlichkeiten  $p_{ij}(t)$  sind Lösung von

1.  $p'_{ij}(t) = \sum_{k \in S} \lambda_{ik} p_{kj}(t)$  bzw.  $P'(t) = \Lambda P(t), P(0) = I$

(Rückwärtsgleichungen von Kolmogorov),

2.  $p'_{ij}(t) = \sum_{k \in S} p_{ik}(t) \lambda_{kj}$  bzw.  $P'(t) = P(t) \Lambda, P(0) = I$

(Vorwärtsgleichungen von Kolmogorov).

3. Für endliches  $S$  ist die Lösung gegeben durch

$$P(t) = e^{t\Lambda} = I + t\Lambda + \frac{(t\Lambda)^2}{2!} + \frac{(t\Lambda)^3}{3!} + \dots$$

Die Berechnung erfolgt mit Hilfe der Spektralzerlegung  $\Lambda = U \text{diag}(d_1, \dots, d_m) U^{-1}$  mit den Eigenwerten  $d_1, \dots, d_m$  und der Matrix  $U$  der Eigenvektoren. Dann gilt

$$P(t) = U \text{diag}(e^{d_1 t}, \dots, e^{d_m t}) U^{-1}.$$

- Die Zustände eines Markov-Prozesses werden anhand der eingebetteten Markov-Kette klassifiziert (Rekurrenz, Erreichbarkeit, Periodizität, etc.).
- Für einen regulären, irreduziblen und positiv-rekurrenten Markov-Prozess  $X$  gilt
  1.  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(X(t) = j) = \pi_j$  existiert  $\forall j$  und ist von der Anfangsverteilung unabhängig.
  2. Die Grenzverteilung  $\pi$  lässt sich berechnen über
    - (a)  $\pi_j = \frac{\eta_j}{\sum_i \eta_i}$  mit  $\eta\Lambda = 0$  bzw.
    - (b)  $\pi_j = \frac{\nu_j/\lambda_j}{\sum_i \nu_i/\lambda_i}$  mit  $\nu = \nu Q$ .
  3.  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \begin{pmatrix} \pi \\ \vdots \\ \pi \end{pmatrix}$
  4.  $\pi = (\dots, \pi_j, \dots)$  ist strikt positiv.
  5.  $\pi$  ist die einzige stationäre Verteilung von  $X$ , d.h. es gilt  $\pi = \pi \cdot P(t) \quad \forall t \geq 0$ .

#### 4.4 Statistische Inferenz bei Markov-Prozessen

- Ziel: Likelihood-basierte Inferenz für  $\Lambda = \{\lambda_{ij}\}$  bzw.  $Q = \{q_{ij}\}$  und  $\lambda = \{\lambda_i\}$
- Situation 1: Vollständige Kenntnis über einen oder mehrere Pfade
  - Likelihood:

$$\begin{aligned} L(\lambda_{ij} | Y_0 = i_0, Y_1 = i_1, \dots, Y_{n-1} = i_{n-1}, Y_n = i_n, T_1 = t_1, \dots, T_n = t_n) &= \\ &= p_{i_0}(0) \prod_{i \in S} \exp(-\lambda_i \gamma_i) \prod_{j \in S, j \neq i} (q_{ij} \lambda_i)^{n_{ij}} \end{aligned}$$

mit  $\gamma_i$  als gesamte Verweildauer in  $i$  und  $n_{ij}$  als Anzahl der Übergänge von  $i$  nach  $j$

- ML-Schätzer:

$$\hat{\lambda}_{ij} = \frac{n_{ij}}{\gamma_i} \quad \hat{\lambda}_i = \frac{n_i}{\gamma_i} \quad \hat{q}_{ij} = \frac{\hat{\lambda}_{ij}}{\hat{\lambda}_i} = \frac{n_{ij}}{n_i}$$

mit  $n_i$  als Anzahl der Übergänge weg von  $i$ , d.h.  $n_i = \sum_j n_{ij}$

- Situation 2: Keine vollständige Kenntnis über die Pfade, d.h. Beobachtungen nur zu den Zeitpunkten  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ . Dann lautet die Likelihood:

$$L(\lambda_{ij} | X(t_1) = i_1, \dots, X(t_n) = i_n) = p_{i_1}(0) p_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \cdot \dots \cdot p_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1})$$

## 5 Erneuerungs- und Semi-Markov-Prozesse

### 5.1 Erneuerungsprozesse

- Sei  $\{T_n, n \in \mathbb{N}\}$  eine Folge unabhängiger, nichtnegativer Zufallsvariablen mit gleicher Verteilungsfunktion  $F$ , für die  $F(0) < 1$  gilt. Dann heißt die Folge  $\{S_n, n \in \mathbb{N}_0\}$  mit

$$S_0 := 0, \quad S_{n+1} = S_n + T_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Erneuerungsprozess (EP). Sei

$$N(t) = \max_{n \in \mathbb{N}_0} \{n : S_n \leq t\}$$

die Anzahl von Erneuerungen im Intervall  $[0, t]$ . Dann heißt  $N = \{N(t), t \geq 0\}$  Erneuerungszählprozess bzw. Erneuerungsprozess.

- Ein Erneuerungsprozess heißt rekurrent, wenn gilt:  $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1$ .
- Sei  $T$  eine stetige, nichtnegative Zufallsvariable mit Dichte  $f(t)$  und Verteilungsfunktion  $F(t)$ . Dann bezeichnet

$S(t) = 1 - F(t)$  die Survivorfunktion,

$$\lambda(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T \leq t + h | T \geq t)}{h} \text{ die Hazardrate und}$$

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du \text{ die kumulierte Hazardrate.}$$

- Es gelten die folgenden Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{f(t)}{S(t)} \\ S(t) &= \exp\left(-\int_0^t \lambda(u) d(u)\right) = \exp(-\Lambda(t)) \\ f(t) &= \lambda(t) \cdot S(t) = \lambda(t) \exp\left(-\int_0^t \lambda(u) du\right) \end{aligned}$$

- Beispiel Weibullverteilung,  $\alpha > 0, \lambda > 0$ :

$$\begin{aligned} \text{Dichte:} \quad f(t) &= \lambda \alpha (\lambda t)^{\alpha-1} \exp(-(\lambda t)^\alpha) \\ \text{Survivorfunktion:} \quad S(t) &= \exp(-(\lambda t)^\alpha) \\ \text{Hazardrate:} \quad \lambda(t) &= \lambda \alpha (\lambda t)^{\alpha-1} \end{aligned}$$

- Verteilungsfunktion  $F_n(t)$  von  $S_n$ :

$$F_n(t) = P(S_n \leq t) = \int_{[0, t]} F_{n-1}(t-x) dF(x) = F_{n-1} \otimes F(t) \quad t \geq 0.$$

mit  $F_1(t) := F(t)$

- Dichte  $f_n(t)$  von  $F_n(t)$ :

$$f_n(t) = \int_0^t f_{n-1}(t-x)f(x)dx, \quad f_1(t) := f(t)$$

- Verteilung von  $N(t)$ :  $P(N(t) = n) = F_n(t) - F_{n+1}(t), \quad n = 0, 1, \dots \quad F_0(t) \equiv 1.$
- Erneuerungsfunktion  $R(t)$ :  $R(t) = \mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t).$
- Erneuerungsdichte  $r(t)$ :  $r(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t).$
- Grenzwertsätze: Für einen rekurrenten Erneuerungsprozess mit stetigen  $T_n$  und  $\mu = \mathbb{E}(T_n)$ ,  $\sigma^2 = \text{Var}(T_n) < \infty$  gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R(t)}{t} = \frac{1}{\mu} \text{ (elementares Erneuerungstheorem),}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[ R(t) - \frac{t}{\mu} \right] = \frac{\sigma^2 - \mu^2}{2\mu^2} \text{ falls } \sigma^2 < \infty \text{ und } S \text{ aperiodisch,}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P \left( \frac{N(t) - \frac{t}{\mu}}{\frac{\sigma}{\mu} \sqrt{\frac{t}{\mu}}} \leq x \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp \left( -\frac{t^2}{2} \right) dt.$$

## 5.2 Semi-Markov-Prozesse

- Sei  $\{Y_n, n \in \mathbb{N}_0\}$  eine Folge von Zufallsvariablen mit abzählbarem Zustandsraum  $S$ ,  $\{S_n, n \in \mathbb{N}_0\}$  eine Folge nichtnegativer Zufallsvariablen mit  $0 = S_0 \leq S_1 \leq S_2 \leq \dots$ . Der stochastische Prozess  $(Y, S) = \{(Y_n, S_n), n \in \mathbb{N}_0\}$  heißt Markov-Erneuerungsprozess (MEP)  $:\Leftrightarrow \forall t, s, s_{n-1}, \dots \in \mathbb{R}_+, \forall j, i_n, \dots, i_0$

$$\begin{aligned} P(Y_{n+1} = j, T_{n+1} \leq t | Y_n = i, Y_{n-1}, \dots, Y_0 = i_0, S_n = s, S_{n-1} = s_{n-1}, \dots) \\ = P(Y_{n+1} = j, T_{n+1} \leq t | Y_n = i). \end{aligned}$$

Ist  $(Y, S)$  ein Markov-Erneuerungsprozess, so heißt  $X = \{X(t), t \geq 0\}$  der zu  $(Y, S)$  gehörige Semi-Markov-Prozess:  $\Leftrightarrow$  (SMP)

$$X(t) = Y_n \quad \text{für } S_n \leq t \leq S_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- Ein Semi-Markov-Prozess heißt homogen, falls

$$P(Y_{n+1} = j, S_{n+1} - S_n \leq t | Y_n = i) = P(Y_1 = j, S_1 \leq t | Y_0 = i) =: Q_{ij}(t)$$

gilt. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten  $Q_{ij}(t)$  heißen Semi-Markov-Übergangswahrscheinlichkeiten.  $Q(t) = (Q_{ij}(t))$  heißt Semi-Markov-Übergangsmatrix.

- Charakterisierung über Hazardraten:

$$\lambda_{ij}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(Y_{n+1} = j, t \leq T_{n+1} \leq t+h | Y_n = i, T_{n+1} \geq t)}{h} = \frac{q_{ij}(t)}{1 - Q_i(t)}$$

mit Dichte  $q_{ij}(t)$  zu  $Q_{ij}(t)$ , d.h.  $q_{ij}(t) = \frac{\partial Q_{ij}(t)}{\partial t}$

- Für die Verweildauer in  $i$  gilt

$$Q_i(t) := \sum_{j \in S} Q_{ij}(t) = P(T_{n+1} \leq t | Y_n = i) = P(S_1 \leq t | Y_0 = i)$$

bzw. in der Charakterisierung über Hazardraten

$$\lambda_i(t) = \frac{q_i(t)}{1 - Q_i(t)},$$

wobei  $q_i(t)$  die Dichte zu  $Q_i(t)$  bezeichnet und  $Q_i(0) < 1$  sowie  $\lim_{t \rightarrow \infty} Q_i(t) = 1$  (gilt weiter im Folgenden).

- $\{Y_n, n \in \mathbb{N}_0\}$  bildet eine homogene Markov-Kette mit Übergangsmatrix

$$Q = (q_{ij}), \quad q_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} Q_{ij}(t) = P(Y_{n+1} = j | Y_n = i).$$

- Für die bedingte Verteilung der Verweildauer  $T_{n+1}$  gegeben  $Y_n = i$  und  $Y_{n+1} = j$  gilt

$$G_{ij}(t) = P(T_{n+1} \leq t | Y_n = i, Y_{n+1} = j) = \frac{Q_{ij}(t)}{q_{ij}}.$$

- Rekurrenzeigenschaften und Irreduzibilität eines Semi-Markov-Prozesses leiten sich aus den entsprechenden Eigenschaften der Markov-Kette  $Y$  ab.
- Der SMP heißt aperiodisch, wenn für alle  $i$  die Zwischenzeiten  $T_{ii}$  zwischen aufeinanderfolgenden Besuchen in  $i$  nicht gitterförmig sind, d.h. es gibt kein  $d \geq 0$  mit  $\sum_{n=0}^{\infty} P(T_{ii} = nd) = 1$ .
- Grenzwertsatz: Der Semi-Markov-Prozess sei aperiodisch, irreduzibel und positiv-rekurrent. Dann gilt für die Übergangswahrscheinlichkeiten  $p_{ij}(t) = P(X(t) = j | Y_0 = i)$  und die Zustandswahrscheinlichkeit  $p_j(t) = P(X(t) = j)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_j(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = \frac{\nu_j \mu_j}{\sum_{i \in S} \nu_i \mu_i},$$

mit strikt positiver stationärer Verteilung  $\nu$  der eingebetteten Markov-Kette  $Y$ , d.h.

$$\nu = \nu Q, \quad \nu > 0, \quad \text{sowie} \quad \mu_i = \int_0^{\infty} t q_i(t) dt = \int_0^{\infty} (1 - Q_i(t)) dt.$$