

Aufgabe 1:

Gegeben sei eine Stichprobe x_1, \dots, x_n von n unabhängigen Wiederholungen einer eindimensionalen Zufallsvariablen x . Drücken Sie die folgenden häufig verwendeten statistischen Kenngrößen in Matrix- bzw. Vektorschreibweise aus:

- (a) Mittelwert

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

- (b) Empirische Varianz

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Aufgabe 2:

Gegeben sei eine Stichprobe $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ von n unabhängigen Wiederholungen einer p -dimensionalen Zufallsvariablen \mathbf{x} .

- (a) Definieren Sie die zugehörige Datenmatrix \mathbf{X} .
(b) Drücken Sie den Mittelwertsvektor $\bar{\mathbf{x}}$ in Matrixschreibweise aus.
(c) Drücken Sie die empirische Kovarianzmatrix \mathbf{S} in Matrixschreibweise aus.

Aufgabe 3:

Die Matrix

$$\mathbf{H} = \mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^\top \quad \text{mit} \quad \mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{1}_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

wird als zentrierende Matrix oder Zentrierungsmatrix bezeichnet. Zeigen Sie, dass die folgenden Beziehungen gelten bzw. berechnen Sie die entsprechenden Kenngrößen:

- (a) $\mathbf{H} = \mathbf{H}^\top$
(b) $\mathbf{H} \cdot \mathbf{x}$ mit $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ wie in Aufgabe 1
(c) $\mathbf{H} \cdot \mathbf{X}$ mit \mathbf{X} wie in Aufgabe 2(a)
(d) $\mathbf{H} \cdot \mathbf{H} = \mathbf{H}$