Statistik IV für Nebenfachstudierende

3.3. Tests für multivariate lineare Regression

Prof. Dr. Andreas Mayr

Institut für Statistik, LMU München

Sommersemester 2017

Klassisches lineares Modell

$$y_{ij} = \mathbf{x}_i^\top \underline{\beta}_{(j)} + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots q,$$

Matrixdarstellungen:

Vektorielle Form

$$\begin{pmatrix} y_{i1} \\ \vdots \\ y_{iq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x}_i^\top & & & \\ & \underline{x}_i^\top & & \\ & & \ddots & \\ & & & \underline{x}_i^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\beta}_{(1)} \\ \vdots \\ \underline{\beta}_{(q)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{i1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{iq} \end{pmatrix}$$

Als Gesamtmodell

$$\underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{X}}_0 \, \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{E}}$$

$$\text{mit } \underline{\underline{X}}_0 = \begin{pmatrix} \underline{x}_1^\top \\ \vdots \\ \underline{x}_n^\top \end{pmatrix}, \underline{\beta}_{(j)} = \begin{pmatrix} \beta_{0j} \\ \vdots \\ \beta_{pj} \end{pmatrix}, \underline{y}_{(j)} = \begin{pmatrix} y_{1j} \\ \vdots \\ y_{nj} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\epsilon}_{(j)} = \begin{pmatrix} \epsilon_{1j} \\ \vdots \\ \epsilon_{nj} \end{pmatrix}.$$

Tests für Koeffizienten

$\underline{\underline{\hat{B}}}$:

- Einzelne Komponente β_{ij}

Lineare Hypothese

$$H_0 : \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{\Gamma}}$$

$$H_1 : \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{\Gamma}}$$

- Klassisches Beispiel: Overall Hypothese

$$H_0 : \beta_{ij} = 0 \quad \forall\, i = 1, ..., p;\ j = 1, ..., q$$

$$H_1$$

In Worten:

Lineare Hypothese

$$H_0 : \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{\Gamma}}$$

$$H_1 : \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{\Gamma}}$$

- Klassisches Beispiel: Overall Hypothese

$$H_0 : \beta_{ij} = 0 \quad \forall\, i = 1, ..., p;\ j = 1, ..., q$$

$$H_1$$

In Worten:

- Overall Hypothese (in Matrixschreibweise)

- Hypothese für eine Einflussgröße

Teststatistik

- M ist Modell mit Koeffizienten-Matrix $\underline{\underline{B}}$
- $\tilde{M}$ ist Modell unter H_0
  - unter Restriktion $\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{\Gamma}}$

- Zwei Schätzverfahren
  - $\hat{\underline{\underline{B}}}$ minimiert
  - $\tilde{\underline{\underline{B}}}$ minimiert

- Brauchen Diskrepanz Daten und Fit

Diskrepanz Daten und Fit

- SSP(M) =

- SSP($\tilde{M}$) =

- Es gilt:

$$\text{SSP}(\tilde{M}) = \text{SSP}(M) + \text{REST}$$

- Alternativ:

Graphisch (ein Versuch):

Teststatistik: Wilks Λ

$H_0 : \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{\Gamma}}$ $\qquad H_1 : \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{\Gamma}}$ $\qquad \text{rg}(\underline{\underline{C}}) = s$

$$\Lambda = \frac{\text{SSP}(M)}{\text{SSP}(\tilde{M})} \sim \Lambda(q, n-p-1, s)$$

Ablehnbereich: H_0 ablehnen, wenn $\Lambda < \Lambda_\alpha(q, n-p-1, s)$

Wiederholung:

$\text{rg}(\underline{\underline{C}})$

SSP($\tilde{M}$) = SSP(M) + SSP($\tilde{M}|M$)

$$
\begin{aligned}
\Lambda &= \frac{\text{SSP}(M)}{\text{SSP}(\tilde{M})} \\
&= \frac{\text{SSP}(M)}{\text{SSP}(\tilde{M}|M)} \sim \Lambda(q, n-p-1, s)
\end{aligned}
$$

Intuition:

- Ist H_0 wahr, stellt $\underline{\underline{C}}\ \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{\Gamma}}$ keine Restriktion dar.
  - SSP($\tilde{M}$) $\approx$ SSP(M)
  - $\Lambda \to 1$, d.h. H_0 nicht ablehnen.
- Ist H_0 fallsch, besteht eine Restriktion.
  - SSP($\tilde{M}|M$) wird groß.
  - $\Lambda \to 0$, H_0 sollte abgelehnt werden.

Graphisch: (Ablehnbereich)

Bemerkung: Es gibt eine Analogie zu Likelihood-Ratio Test

Spezialfälle

- $H_0 : \beta_{sj} = 0 \quad \forall j$

- Ein spezifischer Parameter: $H_0 : \beta_{sj} = 0$

- Ein spezifischer Parameter: $H_0 : \beta_{sj} = 0$

Bemerkung:

- Der KQ-Schätzer $\hat{\beta}_{(j)}$ im multivariaten Modell ist gleich dem KQ-Schätzer $\hat{\beta}$ im Modell mit nur der j-ten abhängigen Variable (j-tes Modell).
- Für j-tes Modell erhält man bei separater Modellierung:

$$\text{Cov}(\hat{\beta}_{(j)}) = \sigma_{jj}(\underline{\underline{X}}_0^\top \underline{\underline{X}}_0)^{-1}$$

- Jedoch nicht verfügbar:

$$\text{Cov}(\hat{\beta}_{(j)}, \hat{\beta}_{(s)}) \text{ mit } s \neq j$$

- D.h. bei separater Modellierung keine Tests über multiple Zielgrößen möglich, das geht nur mit multivariater Regression.
- z.B. $H_0 = \beta_{r1} = ... = \beta_{rq}$