Volker Schmid, Martina Feilke
Institut für Statistik

Bitte für die Korrektur freilassen!				
Aufgabe	1	2	3	$\sum$
Punkte				

Nachklausur zur Vorlesung Räumliche Statistik

16. April 2013

Hinweise:

1. Überprüfen Sie zunächst, ob Ihre Angabe vollständig ist. Sie sollte neben diesem Deckblatt 2 Seiten mit 3 Aufgaben enthalten.
2. Verwenden Sie für Ihre Lösungen ausschließlich die Ihnen zur Verfügung gestellten Papierbögen. Kennzeichnen Sie jeden Bogen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
3. Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
4. Es können maximal 45 Punkte erreicht werden. Die Klausur ist mit 22 Punkten sicher bestanden.
5. Als Hilfsmittel sind erlaubt: Ein von Hand beschriebenes DIN-A4-Blatt (Vorder- und Rückseite) sowie ein nichtprogrammierbarer Taschenrechner.
6. Halten Sie für die Ausweiskontrolle bitte Ihren Studien- und Lichtbildausweis bereit.
7. Bei Unterschleif gilt die Klausur als nicht bestanden und es erfolgt eine Meldung an das Prüfungsamt.

Bitte ausfüllen und unterschreiben!!!

*Name, Vorname (in Druckbuchstaben):*______________________________

*Matrikelnummer:*______________________________

Studiengang: ☐ Master Statistik (PO 2010) ☐ Master Biostatistik (PO 2010)
☐ Master WiSo (PO 2010) ☐ Anderer: ____________

Ich bestätige, dass ich obige Hinweise zur Kenntnis genommen habe und sie befolgen werde. Ich bin mit einer Veröffentlichung meines Klausurergebnisses im Schaukasten (EG) in der Form <Matrikelnummer><Note> einverstanden.
(Falls nicht, den letzten Satz bitte streichen!)

*Unterschrift:*______________________________

Viel Erfolg!

Aufgabe 1	15 Punkte

Gegeben sei folgende Nachbarschaftsstruktur der Regionen in Bayern, wobei angrenzende Regionen Nachbarn sind.

i. Zeichnen Sie einen Graph dieser Nachbarschaftsstruktur, indem Sie jede Region durch einen Knoten repräsentieren und Nachbarn eine Kante mit Gewicht 1 zuweisen.

ii. Nehmen Sie nun an, dass $\theta = (\theta_1, ..., \theta_7)$ ein intrinsisches Gauß-Markov-Zufallsfeld (GMRF) mit Mittelwert μ, Präzision τ und Nachbarschaftsstruktur wie in (i) ist. Geben Sie die Dichte der gemeinsamen Verteilung von $(\theta_1, ..., \theta_7)$ an, sowie die bedingte Verteilung von $\theta_7|\theta_{-7}$ und die explizite Form der Präzisionsmatrix.

iii. Gegeben seien nun $n \cdot T$ unabhängige Realisationen aus dem linearen Modell

$$y_{it} = \beta_i x_{it} + \varepsilon_{it}$$

mit Regionen $i = 1, ..., n$ und Zeitpunkten $t = 1, ..., T$. Basierend auf diesen Realisationen sollen die unbekannten Parameter β und σ^2 bayesianisch geschätzt werden. Dazu werden folgende Annahmen getroffen:

$$\begin{array}{rcl}
\varepsilon_{it} \mid \sigma^2 & \sim & N(0, \sigma^2), \\
\beta \mid \tau & \sim & \textit{intrinsisches GMRF mit Präzisionsmatrix } \tau P, \\
\sigma^2 \mid a, b & \sim & IG(a, b), \\
\tau \mid c, d & \sim & Ga(c, d).
\end{array}$$

Geben Sie die Posteriori-Verteilung an. Geben Sie eine Möglichkeit an, wie mithilfe der Posteriori-Verteilung bayesianisch geschätzt werden kann.

Hinweise: Dichte der Gamma-Verteilung Ga(c,d) für x: $p(x) = \frac{d^c}{\Gamma(c)} x^{c-1} \exp(-dx)$,
Dichte der inversen Gamma-Verteilung IG(a,b) für x: $p(x) = \frac{b}{\Gamma(a)} \frac{1}{x^{a+1}} \exp\left(-\frac{b}{x}\right)$.

Aufgabe 2	17 Punkte

Gegeben seien 200 Messstationen im Schwarzwald in Form von x- und y-Koordinaten, an denen der Magnesiumgehalt des Bodens gemessen wurde.

i. Um welche Art räumlicher Daten handelt es sich hierbei?

ii. Geben Sie ein geeignetes statistisches Modell für die Zielgröße "Magnesiumgehalt des Bodens" an und beschreiben Sie kurz die Bedeutung der in der Modellgleichung enthaltenen Terme.

iii. Nennen Sie zwei Möglichkeiten, die Varianz-Kovarianz-Struktur in diesem / für dieses Modell zu schätzen.

iv. Nennen Sie zwei wünschenswerte Eigenschaften einer Korrelationsfunktion.

v. Wann ist eine Korrelationsfunktion isotrop?

vi. Beschreiben Sie eine Methode, mit der man die Annahme der Isotropie für die gegebenen Daten überprüfen könnte.

Statt des Magnesiumgehalts des Bodens sei nun nur gegeben, ob der Boden an der jeweiligen Messstation magnesiumhaltig ist oder nicht.

vi. Geben Sie ein geeignetes statistisches Modell für die binäre Zielgröße "Magnesiumhaltig" an.

Aufgabe 3	13 Punkte

i. Wie kann ein Log-Gauß-Cox-Prozess simuliert werden? Nennen sie die einzelnen Schritte eines Simulations-Algorithmus. (Pseudo-Code oder in Worten beschreiben)

ii. Beschreiben Sie <u>einen</u> Test, mit dem bei einem vorliegenden Punktprozess untersucht werden kann, ob ein komplett zufälliges räumliches Muster vorliegt.