Multivariate Verteilungen, Schätzen

Aufgabe 1:
Sei $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ ein Zufallsvektor mit Kovarianz

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte λ_1 und λ_2 und die (normierten) Eigenvektoren der Matrix $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}}$.

b) Berechnen Sie mit Hilfe von a) einen Zufallsvektor $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$, dessen Komponenten y_1 und y_2 lineare Kombinationen von x_1 und x_2 sind und der folgende Kovarianz hat:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2:
Sei $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_p)^T$ ein p-dimensionaler multivariat normalverteilter Zufallsvektor. Die Dichte von $\mathbf{x}$ ist dann gegeben durch

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p|\boldsymbol{\Sigma}|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right),$$

wobei $\boldsymbol{\mu}$ der Mittelwert und $\boldsymbol{\Sigma}$ die Kovarianz von $\mathbf{x}$ sind.

a) Berechnen Sie diese Dichte im Fall $p = 2$ mit den Bezeichnungen $\sigma_i^2 = var(x_i)$, $i = 1, 2$, und $\rho = \frac{cov(x_1,x_2)}{\sigma_1\sigma_2}$. Folgern Sie daraus, dass x_1 und x_2 unabhängig sind, wenn sie unkorreliert sind.

b) Stellen Sie die Dichte für $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 3$ und verschiedenen Werten von ρ mit Hilfe von `R` graphisch dar.

Aufgabe 3:
Sei $\mathbf{z} = (\mathbf{y}^T\ \mathbf{x}^T)^T \sim \mathcal{N}_{q+p}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, wobei

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{y}} \\ \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}} \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{y}} & \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{yx}} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{xy}} & \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Verteilungen der Komponentenvektoren $\mathbf{y}$ und $\mathbf{x}$.

Aufgabe 4:
Seien $\mathbf{x}_i$, $i = 1, \ldots, n$, iid. multivariat verteilte Zufallsvektoren mit Erwartungswert $\boldsymbol{\mu}$ und Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$.

a) Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{S} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T$$

ein erwartungstreuer Schätzer für die Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$ ist.

b) Es bezeichne

$$\mathrm{MD}_i^2 = ||\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}||^2_{\mathbf{S}^{-1}} = (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})$$

die quadrierte Mahalanobis-Distanz zwischen $\mathbf{x}_i$ und $\bar{\mathbf{x}}$. Zeigen Sie, daß folgendes gilt:

$$\sum_{i=1}^{n}\mathrm{MD}_i^2 = (n-1)p.$$