# 2.Tutorium Multivariate Verfahren

## - Multivariate Verteilungen -

Hannah Busen:

27.04.2015 und 04.05.2015

Nicole Schüller:

28.04.2015 und 05.05.2015

Institut für Statistik, LMU München

# Gliederung

# Gliederung

- p-dimensionale Zufallsvariable **X**:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}, \text{ wobei } X_1, \ldots, X_p \text{ Zufallsvariablen}$$

- Komponentenweiser Erwartungswert(vektor):

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbb{E}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(X_1) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(X_p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_p \end{pmatrix}$$

- Kovarianz:

$$\mathbf{\Sigma} = Cov(\mathbf{X}) = \mathbb{E}[(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^\top] = \begin{pmatrix} cov(X_1, X_1) & \dots & cov(X_1, X_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(X_p, X_1) & \dots & cov(X_p, X_p) \end{pmatrix}$$

- Korrelation:

$$\mathbf{P} = (\rho_{ij})_{pxp} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{\Sigma}\mathbf{D}^{-1} \text{ mit } \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_p \end{pmatrix}$$

$$\text{da } \rho_{ij} = \frac{cov(X_i, X_j)}{\sqrt{var(X_i)}\sqrt{var(X_j)}}$$

# Gliederung

# Multivariate Normalverteilung

- $\mathbf{x}$ heißt p-dimensional normalverteilt mit Erwartungswert $\boldsymbol{\mu}$ und Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$: $\mathbf{x} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$
- Dichte:

$$f(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{(2\pi)^{p/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} exp(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}))$$

- Insbesondere ist in $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}$ jede Komponente $X_i$ normalverteilt: $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$

# Wishartverteilung

- $\mathbf{M}$ heißt wishart-verteilt mit Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$ und m Freiheitsgraden: $\mathbf{M} \sim W_p(\boldsymbol{\Sigma}, m)$
- Zusammenhang zur p-dimensionalen Normalverteilung:
  - Seien $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \overset{\text{iid}}{\sim} N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$
  - Sei weiterhin $\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^\top \in \mathbb{R}^{pxp}$
  - Dann gilt: $\mathbf{M} \sim W_p(\boldsymbol{\Sigma}, m)$
- Eindimensionales Pendant: $\mathcal{X}^2$-Verteilung

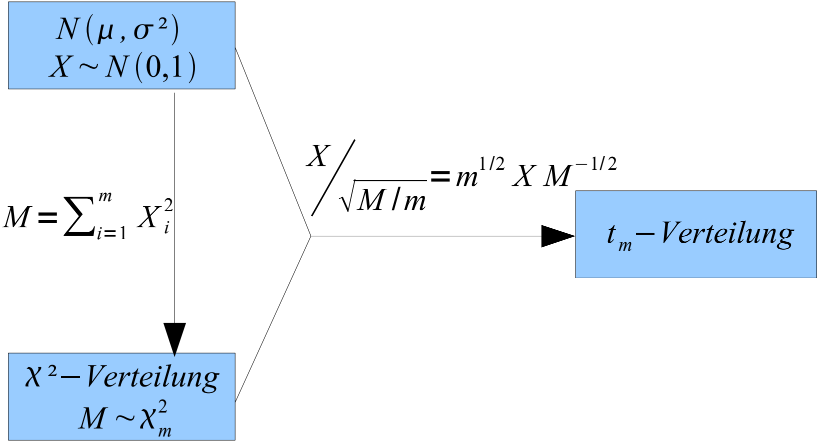
# Hotellings $T^2$-Verteilung

- X ist Hotelling-$T^2$-verteilt mit p und m Freiheitsgraden:

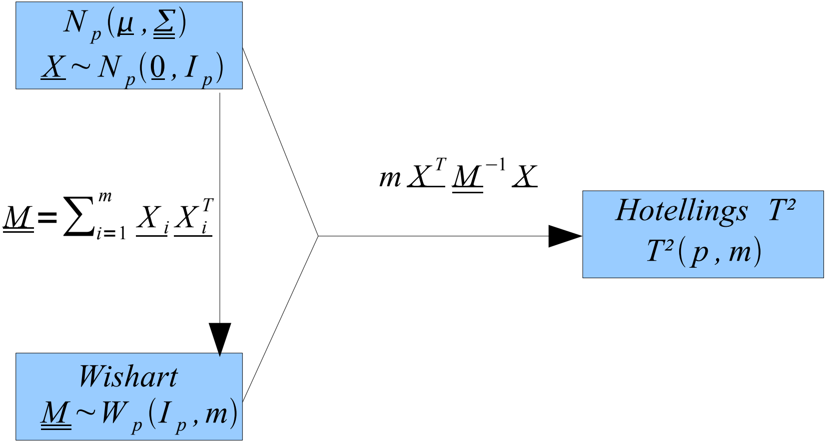
  $X \sim T^2(p, m)$
- Zusammenhang zur p-dimensionalen Normalverteilung und Wishartverteilung:
  - Sei $\mathbf{d} \sim N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ und $\mathbf{M} \sim W_p(\mathbf{I}, m)$
  - $\mathbf{d}$ und $\mathbf{M}$ seien unabhängig
  - Dann gilt: $m\mathbf{d}^\top \mathbf{M}^{-1}\mathbf{d} \sim T^2(p, m)$
- Eindimensionales Pendant: Student-t-Verteilung

# Gliederung

# Univariate Verteilungen



# Multivariate Verteilungen



# Gliederung

# Schätzung für $\boldsymbol{\mu} = \mathbb{E}(\mathbf{X})$

- Gegeben sei die Datenmatrix $\mathbf{X}$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^\top \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^\top \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{np} \end{pmatrix}$$

- Schätzung des Erwartungswerts mittels des Mittelwertsvektors

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_{i1} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_{ip} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_p \end{pmatrix}$$

# Schätzung der Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$ (Vektordarstellung)

- Erwartungstreuer Schätzer $\mathbf{S}$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^\top = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^\top - n\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{x}}^\top\right)$$

- Alternativer Schätzer

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{n-1}{n}\mathbf{S} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^\top - n\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{x}}^\top\right)$$

# Schätzung der Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$ (Matrixdarstellung)

- Betrachte Zentrierungsmatrix **H**:

$$\mathbf{H} = \mathbf{I_n} - \frac{1}{n}\mathbf{1_n}\mathbf{1_n}^\top = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \\ 1 & & 1 \end{pmatrix}$$

- **HX** enthält zentrierte Daten
- Erwartungstreuer Schätzer **S**

$$\mathbf{S} = \frac{1}{n-1}(\mathbf{HX})^\top(\mathbf{HX}) = \frac{1}{n-1}\mathbf{X}^\top\mathbf{H}^\top\mathbf{HX} = \frac{1}{n-1}\mathbf{X}^\top\mathbf{HX}$$

- **H** ist idempotent und symmetrisch

# Eigenschaften von **S**

- Erwartungstreue

$$\mathbb{E}(\mathbf{S}) = \mathbf{\Sigma}$$

- Verteilung von **S**

  Wenn $\mathbf{x} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma})$, dann gilt:

$$(n-1)\mathbf{S} = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^\top \sim W_p(\mathbf{\Sigma}, n-1)$$

# Gliederung

# Rechenregeln für Matrizen

- $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^\top = \mathbf{A}^\top + \mathbf{B}^\top = \mathbf{B}^\top + \mathbf{A}^\top$
- $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^\top = \mathbf{B}^\top \cdot \mathbf{A}^\top$
- $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$
- $(\mathbf{A}^\top)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^\top$
- $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$
- $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$
- $\mathbf{x}^\top\mathbf{Ay} = \mathbf{y}^\top\mathbf{A}^\top\mathbf{x} = (\mathbf{x}^\top\mathbf{Ay})^\top$
- $(\mathbf{x}-\mathbf{y})^\top\mathbf{A} = \mathbf{x}^\top\mathbf{A} - \mathbf{y}^\top\mathbf{A}$

# Binomische Formel

- Erinnerung: Binomische Formel mit Skalaren

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

- Falls **A** symmetrisch

$$(\mathbf{x}-\mathbf{y})^\top \mathbf{A}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} - 2\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{y}^\top \mathbf{A}\mathbf{y}$$

# Ableitungsregeln

- $\frac{\partial \mathbf{y}^\top \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{y}$
- $\frac{\partial \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{y}}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{x}\mathbf{y}^\top$
- $\frac{\partial \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top) \cdot \mathbf{x}$
- $\mathbf{A}$ symmetrisch $\Rightarrow (\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top) \cdot \mathbf{x} = 2\mathbf{A}\mathbf{x} = 2\mathbf{A}^\top \mathbf{x}$