Multivariate Regression

Aufgabe 1:
Es sei das multivariate Regressionsmodell

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\,\mathbf{B} + \mathbf{E}$$

gegeben, wobei $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times(p+1)}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{(p+1)\times q}$ und $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n\times q}$. Dabei besteht $\mathbf{E}$ zeilenweise aus unabhängigen identisch verteilten Vektoren, und es gilt für die i–te Zeile $\boldsymbol{\epsilon}_i$ von $\mathbf{E}$

$$\begin{aligned} E\left(\boldsymbol{\epsilon}_i\right) &= \mathbf{0} \\ E\left(\boldsymbol{\epsilon}_i^T\boldsymbol{\epsilon}_i\right) &= \boldsymbol{\Sigma}\,. \end{aligned}$$

Schreiben Sie das Modell in der multiplen Form

$$\mathbf{z} = \mathbf{W}\,\mathbf{b} + \boldsymbol{\epsilon}\,,$$

wobei $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{?\times 1}$, $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{?\times ?}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{?\times 1}$ und $\boldsymbol{\epsilon} \in \mathbb{R}^{?\times 1}$. Für die „?“ sind dabei die entsprechenden Dimensionen einzusetzen. Geben Sie die Kovarianzmatrix von $\boldsymbol{\epsilon}$ an.

Aufgabe 2:
Für ein multivariates Regressionsmodell $\mathbf{Y} = \mathbf{XB} + \mathbf{E}$ mit den Matrizen $\mathbf{Y}$ $(n\times q)$, $\mathbf{X}$ $(n\times(p+1))$, $\mathbf{B}$ $((p+1)\times q)$ und $\mathbf{E}$ $(n\times q)$ sei $\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$ der KQ-Schätzer und $\mathbf{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$ die Hat-Matrix. Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Beziehungen

a) $\hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{Y}'\mathbf{H}\mathbf{Y}$,

b) $(\mathbf{Y}-\hat{\mathbf{Y}})'(\mathbf{Y}-\hat{\mathbf{Y}}) = \mathbf{Y}'(\mathbf{I}-\mathbf{H})\mathbf{Y}$,

c) $\mathbf{Y}'\mathbf{Y} = \hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}} + (\mathbf{Y}-\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}})'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}})$.

Das Modell werde nun folgendermaßen partitioniert: $\mathbf{Y} = \mathbf{X_1B_1} + \mathbf{X_2B_2} + \mathbf{E}$ mit $\mathbf{X_1}$ $(n\times v)$, $\mathbf{X_2}$ $(n\times r)$ und $v + r = p + 1$. Sei $\tilde{\mathbf{B}}_1$ der KQ-Schätzer des reduzierten Modells $\mathbf{Y} = \mathbf{X_1B_1} + \mathbf{E}$. Zeigen Sie, dass

d) $(\mathbf{Y}-\mathbf{X_1}\tilde{\mathbf{B}}_1)'(\mathbf{Y}-\mathbf{X_1}\tilde{\mathbf{B}}_1) = (\mathbf{Y}-\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}})'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}) + \hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}} - \tilde{\mathbf{B}}_1'\mathbf{X}_1'\mathbf{X_1}\tilde{\mathbf{B}}_1$ gilt.

e) Betrachten Sie den Spezialfall $v = 1$, $r = p$.

Aufgabe 3:
Für ein multivariates Regressionsmodell $\mathbf{Y} = \mathbf{XB} + \mathbf{E}$ betrachte man die linearen Nullhypothesen der Form $H_0 : \mathbf{CBD} = \mathbf{0}$. Verbalisieren Sie für die nachstehenden Versionen dieser allgemeinen Form die konkret vorliegende Testsituation.

a) $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{B} = \mathbf{0},$$

b) $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{B} = \mathbf{0},$$

c) $$\mathbf{B} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$