

Dieses Blatt beschäftigt sich mit multivariaten Testproblemen am Beispiel der Zehnkampfdaten aus Aufgabe 5.

Aufgabe 7:

Für das Jahr 2008 enthält der Datensatz die Ergebnisse von 280 Athleten. Im Mittel erzielten diese Athleten folgende Ergebnisse in Sekunden im 100-Meter-Lauf (M100) und 400-Meter-Lauf (M400):

$$\bar{\mathbf{x}}_{2008} = \begin{pmatrix} \overline{\text{M100}} \\ \overline{\text{M400}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11.23 \\ 50.51 \end{pmatrix}$$

(a*) Testen Sie zum Signifikanzniveau von 5% unter der Annahme

$$\begin{pmatrix} \text{M100} \\ \text{M400} \end{pmatrix} \sim N_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}_0)$$

die Hypothese $H_0 : \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$ mit

$$\boldsymbol{\mu}_0 = \begin{pmatrix} 11 \\ 50 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\Sigma}_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} .$$

(b) Testen Sie zum gleichen Signifikanzniveau die Hypothese $H_0 : \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$ bei unbekannter Kovarianzmatrix.

Hinweis: Die empirische Kovarianzmatrix für die vorliegende Stichprobe lautet

$$S_{2008} = \begin{pmatrix} 0.09 & 0.26 \\ 0.26 & 1.98 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 8:

In dieser Aufgabe wird zusätzlich die Stichprobe von 221 Athleten aus dem Jahr 1998 betrachtet, dabei ergeben sich Mittelwertsvektor und Kovarianzmatrix wie folgt:

$$\bar{\mathbf{x}}_{1998} = \begin{pmatrix} \overline{\text{M100}} \\ \overline{\text{M400}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11.21 \\ 50.35 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S_{1998} = \begin{pmatrix} 0.09 & 0.31 \\ 0.31 & 2.28 \end{pmatrix}$$

Es soll untersucht werden, ob sich die Ergebnisse in den beiden betrachteten Disziplinen zwischen 1998 und 2008 signifikant verändert haben. Testen Sie zum Signifikanzniveau von 5% und unter der Annahme identischer Kovarianzmatrizen in den Subpopulationen die folgende Hypothese:

$$H_0 : \boldsymbol{\mu}_{1998} = \boldsymbol{\mu}_{2008} .$$

Aufgabe 9:

In dieser Aufgabe werden die Ergebnisse im Diskus- und Speerwurf von vier Athleten untersucht. In den Jahren 2007 und 2008 erzielten die vier Athleten folgende Ergebnisse im Diskus- und Speerwurf (gemessen in Metern):

$$\mathbf{x}_1^{(2007)} = \begin{pmatrix} 39.63 \\ 64.35 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_2^{(2007)} = \begin{pmatrix} 48.95 \\ 59.84 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_3^{(2007)} = \begin{pmatrix} 36.14 \\ 69.09 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_4^{(2007)} = \begin{pmatrix} 35.68 \\ 51.12 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_1^{(2008)} = \begin{pmatrix} 41.85 \\ 64.09 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_2^{(2008)} = \begin{pmatrix} 49.98 \\ 50.62 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_3^{(2008)} = \begin{pmatrix} 52.74 \\ 70.55 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_4^{(2008)} = \begin{pmatrix} 41.94 \\ 50.40 \end{pmatrix}$$

Testen Sie mit einem geeigneten Test zum Signifikanzniveau von 5% unter Annahme von normalverteilten Ergebnissen in den beiden Jahren, ob sich die mittleren Wurfleistungen der Athleten vom Jahr 2007 zum Jahr 2008 signifikant verändert haben. Setzen Sie dabei voraus, dass die Kovarianzmatrix unbekannt ist.

Hinweis (für alle Aufgaben): Quantile der F-Verteilung

$$F_{0.95}(2, 278) = 3.028 \quad F_{0.95}(278, 2) = 19.492 \quad F_{0.95}(2, 498) = 3.014 \quad F_{0.95}(498, 2) = 19.494$$