# Statistik IV für Nebenfachstudierende

## 2.2 Testen

Prof. Dr. Andreas Mayr

Institut für Statistik, LMU München

Sommersemester 2017

# Wiederholung

- Was sind die Hypothesen $H_0$ und $H_1$?
- Was ist eine Teststatistik?
- Was ist der Fehler erster Art?
- Was ist der Fehler zweiter Art?

# Wiederholung II

- Was sind die kritischen Werte?
- Was sind Tests für abhängige Daten?
- Was bedeutet ein signifikantes Ergebnis?
- Was bedeutet der p-Wert?

# Wiederholung III

- Was sind nichtparametrische Tests?
- Was ist das Problem des multiplen Testen?
- Was ist die Analogie zwischen Konfidenzintervallen und statistischen Tests?

# Multivariate Tests in dieser Veranstaltung

1. Ein-Stichprobenfall, $\Sigma$ bekannt
2. Ein-Stichprobenfall, $\Sigma$ unbekannt
3. Zwei unabhängige Stichproben
4. Zwei abhängige Stichproben

# Ein-Stichprobenfall, $\Sigma$ bekannt

$$H_0 : \underline{\mu} = \underline{\mu}_0$$
$$H_1 : \underline{\mu} \neq \underline{\mu}_0$$

**Beispiel:** $p = 1$

$H_0 : \mu = \mu_0$

$H_1 : \mu \neq \mu_0$

- Gauß-Test, $\sigma^2 =$ Var$(x)$ bekannt

  $x \sim N(\mu, \sigma^2)$, und Var$(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$

$$G = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

- Nur zweiseitig: $G^2 = \frac{(\bar{x}-\mu)^2}{\sigma^2/n} \sim \chi$
- Wenn $\sigma^2$ unbekannt schätzen durch Var$(x)$; ► t-test.

## **Multivariat** $p \geq 1$

- $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n$ unabhängige Realisierungen der Stichprobenvariablen
- $\underline{x}_i \sim N_p(\underline{\mu}, \underline{\underline{\Sigma}}) \quad i = 1, \ldots, n, \quad \underline{\underline{\Sigma}}$ bekannt
- $H_0 : \underline{\mu} = \underline{\mu}_0 \quad H_1 : \underline{\mu} \neq \underline{\mu}_0$
- $\mathrm{Cov}(\underline{\bar{x}}) = \frac{1}{n}\,\underline{\underline{\Sigma}}$ ► $\mathrm{Cov}(\underline{\bar{x}})^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{n}\,\underline{\underline{\Sigma}}^{-\frac{1}{2}}$
- Teststatistik:

$$\begin{aligned} T^2 &= \left(\sqrt{n}\,\underline{\underline{\Sigma}}^{-\frac{1}{2}}(\underline{\bar{x}} - \underline{\mu}_0)\right)^\top \left(\sqrt{n}\,\underline{\underline{\Sigma}}^{-\frac{1}{2}}(\underline{\bar{x}} - \underline{\mu}_0)\right) \\ &= n(\underline{\bar{x}} - \underline{\mu}_0)^\top \underline{\underline{\Sigma}}^{-1}(\underline{\bar{x}} - \underline{\mu}_0) \\ & \quad T^2 \overset{H_0}{\sim} \chi^2(p) \end{aligned}$$

## Bemerkung

- Einfache quadratische euklidische Distanz wäre

  $$||\underline{\bar{x}} - \underline{\mu}_0||^2 = (\underline{\bar{x}} - \underline{\mu}_0)^\top (\underline{\bar{x}} - \underline{\mu}_0)$$

- Hier gewichtete (Mahalanobis) Distanz

  $$d(\underline{\bar{x}}, \underline{\mu}_0) = \sqrt{(\underline{\bar{x}} - \underline{\mu}_0)^\top \underline{\underline{\Sigma}}^{-1} (\underline{\bar{x}} - \underline{\mu}_0)}$$

## Ablehnbereich

$$
\begin{aligned}
T^2 &= n(\underline{\bar{x}} - \underline{\mu}_0)^\top \underline{\underline{\Sigma}}^{-1} (\underline{\bar{x}} - \underline{\mu}_0) \\
T^2 &\overset{H_0}{\sim} \chi^2(p)
\end{aligned}
$$

- $T^2 > \chi^2_{1-\alpha}(p) \Rightarrow H_0$ ablehnen

# Ein-Stichprobenfall, $\Sigma$ unbekannt

- Offensichtlich ist der in der Praxis $\underline{\underline{\Sigma}}$ meist unbekannt.
- $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n$ unabhängige Realisierungen der Stichprobenvariablen
- $\underline{x}_i \sim N_p(\underline{\mu}, \underline{\underline{\Sigma}})$ mit unbekanntem $\underline{\underline{\Sigma}}$ ► Schätzung über $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$

  Hypothesen:

$$H_0 : \underline{\mu} = \underline{\mu}_0 \ , \ H_1 : \underline{\mu} \neq \underline{\mu}_0$$

  Teststatistik:

$$T_s = \frac{n(n-p)}{p(n-1)} (\underline{\bar{x}} - \underline{\mu}_0)^\top \underline{\underline{\mathbf{S}}}^{-1} (\underline{\bar{x}} - \underline{\mu}_0),$$

$$T_s \overset{H_0}{\sim} F(p, n-p)$$

## Ablehnbereich

$$T_s > F_{1-\alpha}(p, n-p)$$

# Zwei unabhängige Stichproben

- $\mathbf{X}_1 = (\underline{x}_{11}, \ldots, \underline{x}_{1n_1})^T$ ist eine unabhängige Stichprobe aus einer $N_p(\underline{\mu}_1, \underline{\underline{\Sigma}})$–verteilten Grundgesamtheit,
- $\mathbf{X}_2 = (\underline{x}_{21}, \ldots, \underline{x}_{2n_2})^T$ ist eine unabhängige Stichprobe aus einer $N_p(\underline{\mu}_2, \underline{\underline{\Sigma}})$–verteilten Grundgesamtheit,
- Es werden gleiche Kovarianzmatrizen $\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}}_1 = \underline{\underline{\Sigma}}_2$ vorausgesetzt.

**Hypothesen:**

$$H_0 : \underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_2 \; , \; H_1 : \underline{\mu}_1 \neq \underline{\mu}_2$$

**Erinnerung:** $p = 1$

- t-test für 2 unverbundene Stichproben
- Teststatistik

$$T = \frac{|\bar{x_1} - \bar{x_2}|}{s} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$$

mit

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

und

$$T \overset{H_0}{\sim} t_{n_1+n_2-2}$$

**Multivariat:** $p \geq 1$

- Aus den beiden Stichproben wird jeweils $\underline{\bar{x}}$ und $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ geschätzt.
- Daraus ergibt sich dann die Teststatistik

$$T^2 = \frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2} \cdot (\underline{\bar{x}}_1 - \underline{\bar{x}}_2)^\top \underline{\underline{\mathbf{S}}}^{-1} (\underline{\bar{x}}_1 - \underline{\bar{x}}_2)$$

$$\text{mit } \underline{\underline{\mathbf{S}}} = \frac{1}{n_1 + n_2 - 2} \left[ (n_1 - 1) \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}}_1 + (n_2 - 1) \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}}_2 \right]$$

$$\text{und } \underline{\underline{\mathbf{S}}}_i = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} (\underline{x}_j^{(i)} - \underline{\bar{x}}^{(i)})(\underline{\bar{x}}_j^{(i)} - \underline{\bar{x}}^{(i)})^\top$$

- Ablehnbereich:

$$\frac{n_1 + n_2 - p - 1}{(n_1 + n_2 - 2) \cdot p} \cdot T^2 > F_{1-\alpha}(p; n_1 + n_2 - p - 1)$$

weil

$$\frac{n_1 + n_2 - p - 1}{(n_1 + n_2 - 2) \cdot p} \cdot T^2 \overset{H_0}{\sim} F(p; n_1 + n_2 - p - 1)$$

# Zwei verbundene Stichproben

- Daten

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_i^{(1)} \\ \underline{x}_i^{(2)} \end{pmatrix} \sim N_{2p}\left( \begin{pmatrix} \underline{\mu}_1 \\ \underline{\mu}_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \underline{\underline{\Sigma}}_{11} & \underline{\underline{\Sigma}}_{12} \\ \underline{\underline{\Sigma}}_{12} & \underline{\underline{\Sigma}}_{22} \end{pmatrix} \right)$$

- Beispiel: klinische Studie

**Hypothesen:**

$$H_0 : \underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_2 \Leftrightarrow \underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2 = \mathbf{0}\ ,\ \mathbf{H_1} : \underline{\mu}_\mathbf{1} \neq \underline{\mu}_\mathbf{2}$$

$$\begin{aligned} \underline{d}_i &= \underline{x}_i^{(1)} - \underline{x}_i^{(2)} \Rightarrow H_0 \text{ besagt: } E(\underline{d}_i) = \mathbf{0} \\ \underline{d}_i &\sim N_p(\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2; \underline{\underline{\Sigma}}_{11} + \underline{\underline{\Sigma}}_{22} - \underline{\underline{\Sigma}}_{12} - \underline{\underline{\Sigma}}_{21}) \end{aligned}$$

- Entspricht also Einstichprobentest für die Differenzen.
- Also jetzt $\underline{d}$ statt $\underline{x}$, und $H_0 : \underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2 = \underline{\mu}_0$ statt $H_0 : \underline{\mu} = \underline{\mu}_0$

**Bekannte Kovarianzmatrix** von $\underline{d}$ sei $\underline{\underline{\Sigma}}_d$:

$$H_0 \text{ ablehnen} \quad \Leftrightarrow \quad n \cdot \bar{\underline{d}}^\top \cdot \underline{\underline{\Sigma}}_d^{-1} \cdot \bar{\underline{d}} > \chi^2_{1-\alpha}(p)$$

**Unbekannte Kovarianzmatrix:**

$$H_0 \text{ ablehnen} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(n-p)\cdot n}{(n-1)\cdot p} \cdot \bar{\underline{d}}^\top \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}}_d^{-1} \cdot \bar{\underline{d}} > F_{1-\alpha}(p; n-p)$$

$$\text{mit } \bar{\underline{d}} = \frac{1}{n}\sum\nolimits_{i=1}^{n} \underline{d}_i$$

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}}_d = \frac{1}{n-1}\sum\nolimits_{i=1}^{n} (\underline{d}_i - \bar{\underline{d}})(\underline{d}_i - \bar{\underline{d}})^\top$$