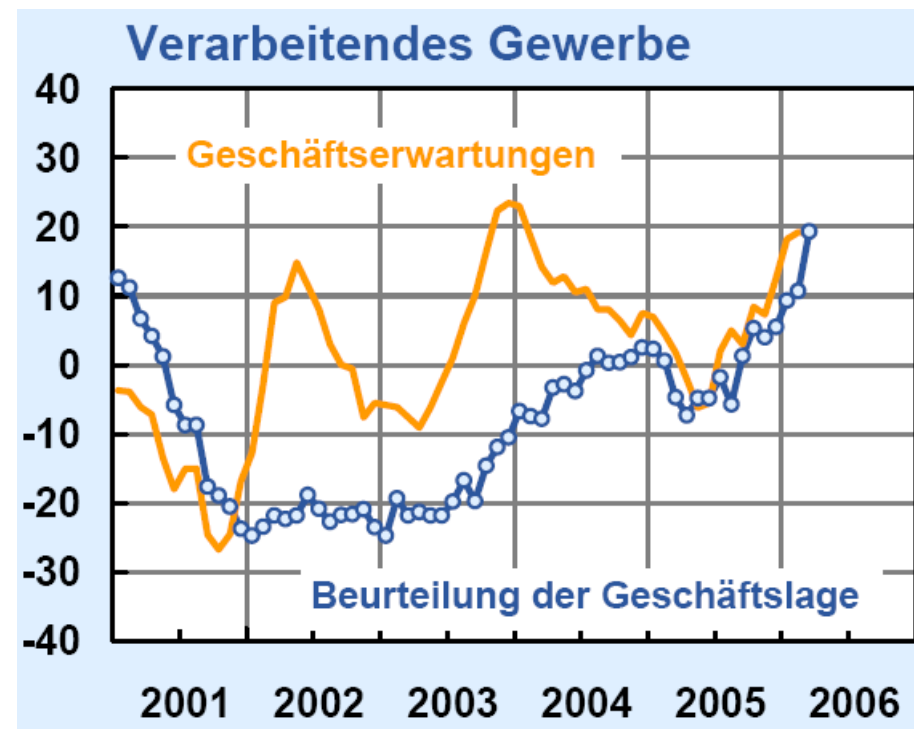


Kapitel 1

Einführung und Beispiele

1.1 Einführende Beispiele und erste Definition

- Rein zeitliche Beispiele:
 - IFO Geschäftsklima Index



Zeit: diskret; Zustandsraum: stetig.

- Aktienkurse (Inter-Tagesdaten)

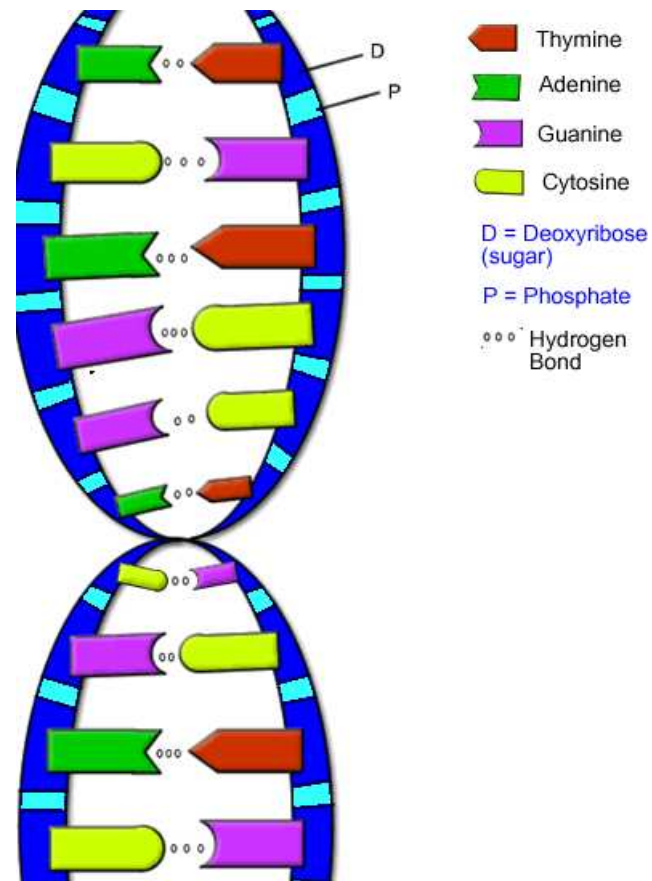


Zeit: stetig; Zustandsraum: stetig.

- Individuelle Arbeitslosigkeitsverläufe

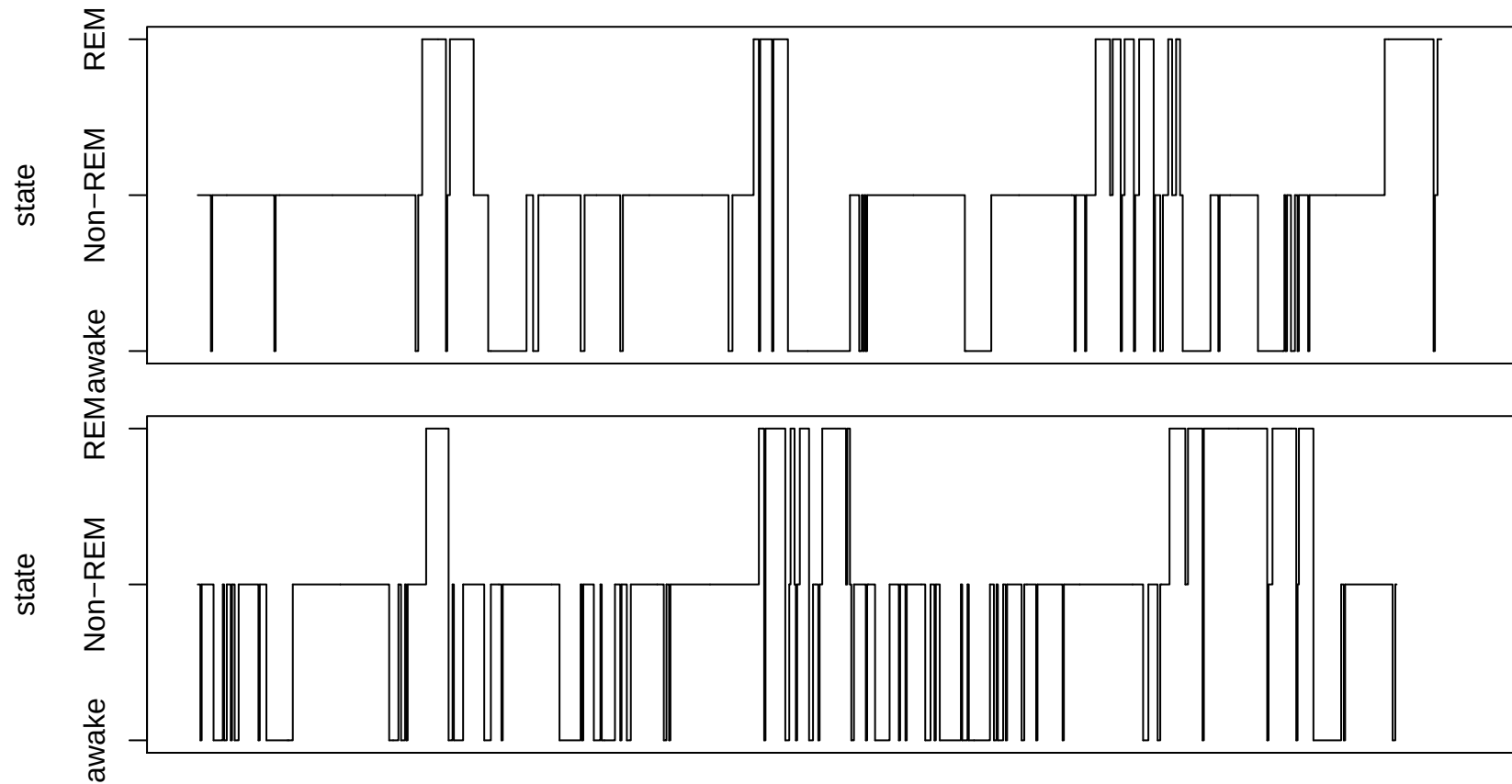
Zeit: diskret; Zustandsraum: binär / kategorial.

– DNA-Sequenzen



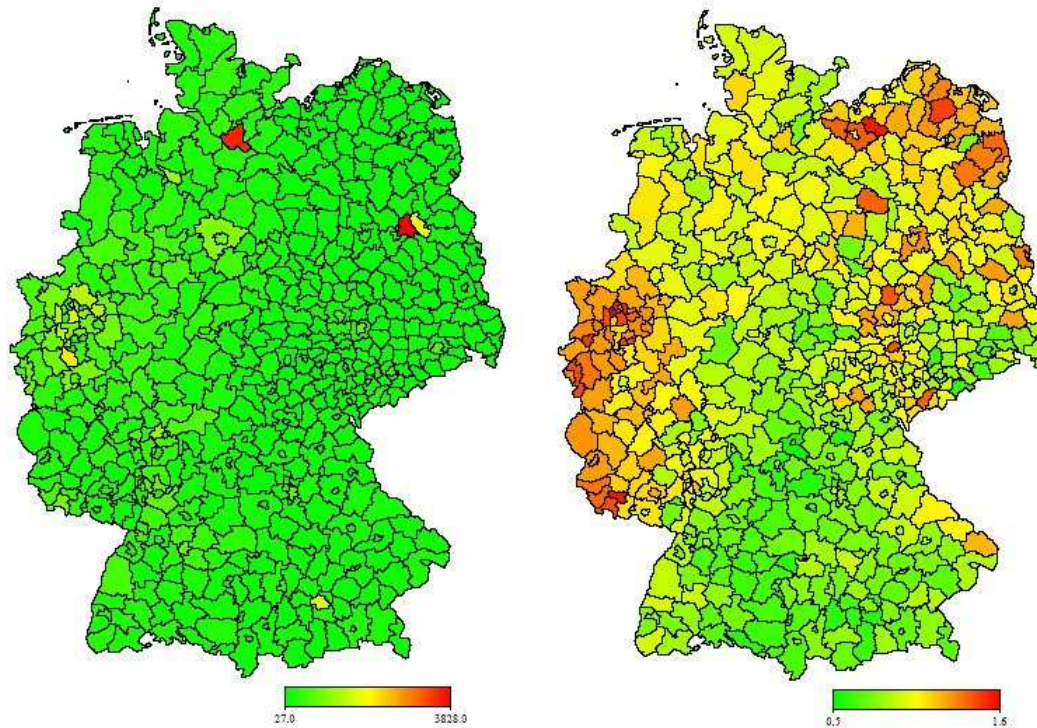
"Zeit": diskret; Zustandsraum: diskret.

– Schlafzustände



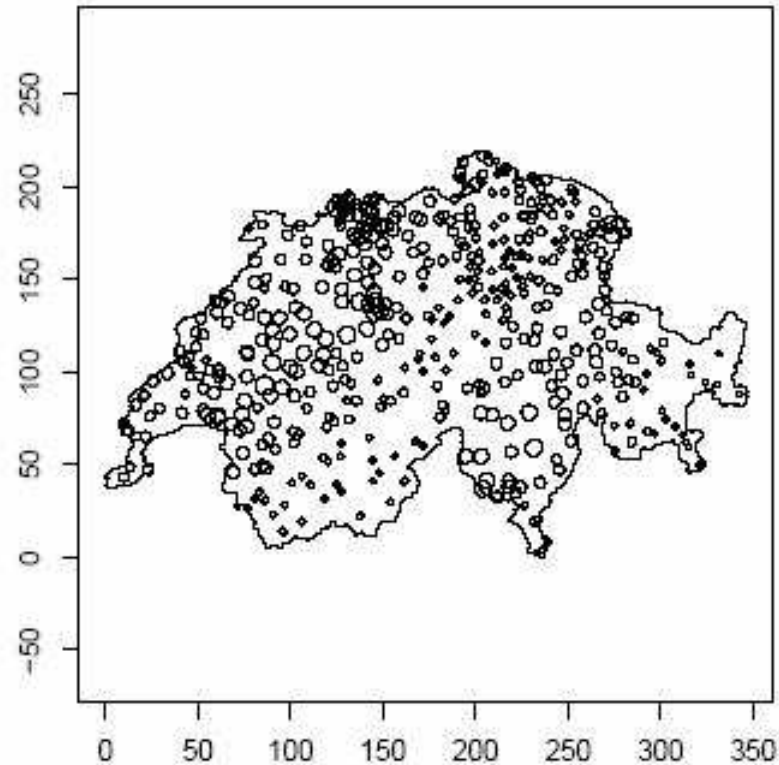
Zeit: stetig; Zustandsraum: diskret.

- Rein räumliche Beispiele:
 - Krebsatlas



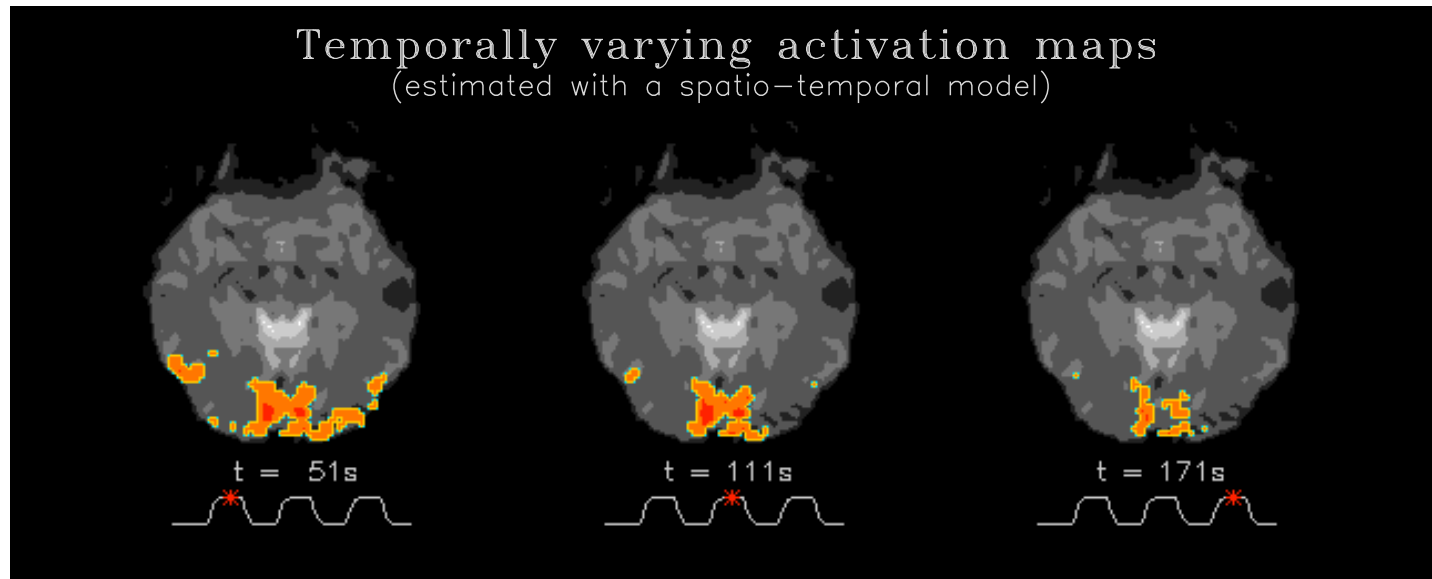
Raum: diskret; Zustandsraum: diskret.

– Schweizer Regenfalldaten



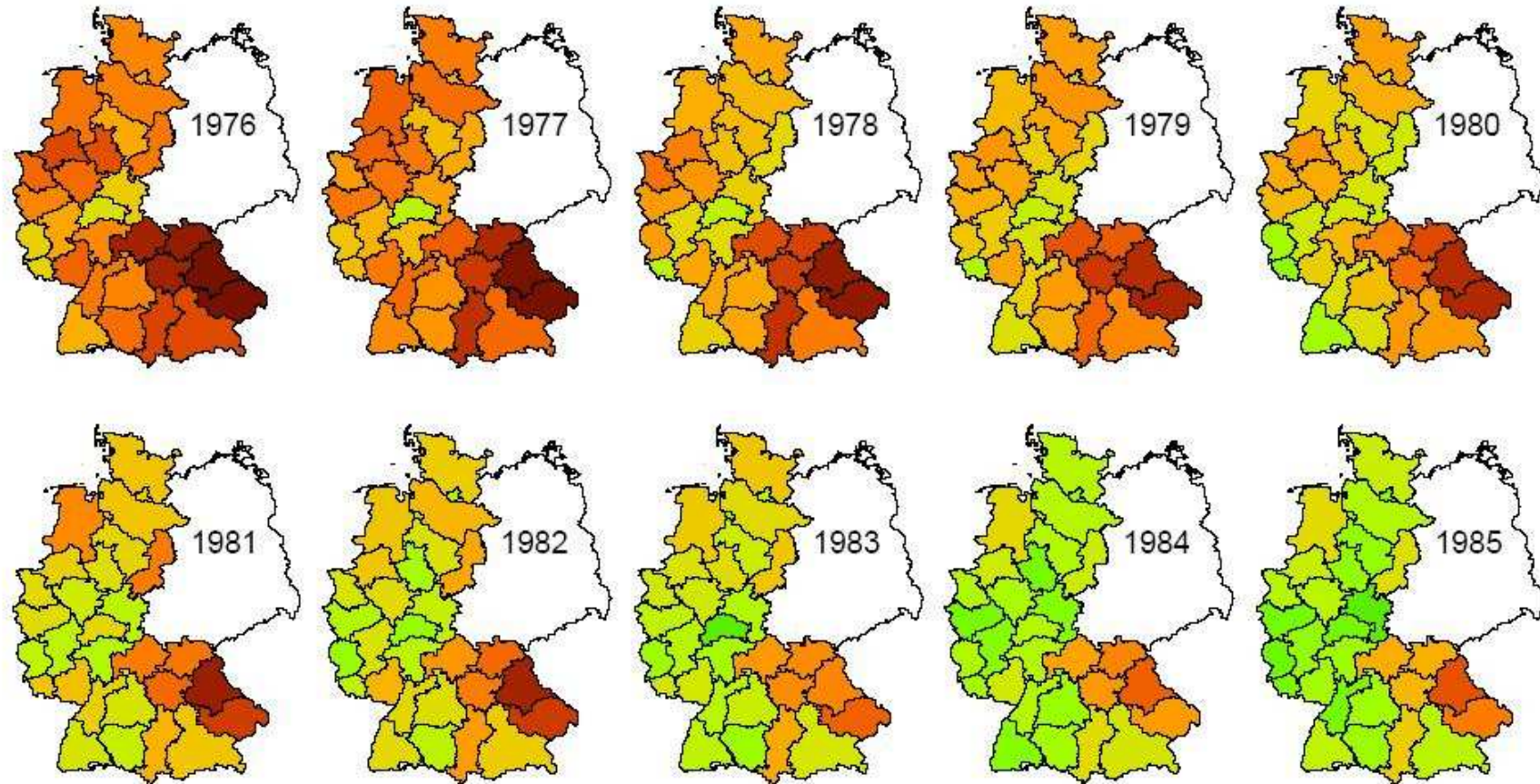
Raum: stetig; Zustandsraum: stetig.

- Räumlich-zeitliche Beispiele:
 - fMRI-Daten



Zeit: diskret, Raum: diskret, Zustandsraum: stetig.

– Krebsatlas



Zeit: diskret; Raum: diskret; Zustandsraum: diskret.

- Allgemein: Realisierungen von Zufallsvariablen X_t , $t \in T$, mit einer geeigneten Indexmenge T , z.B. mit

$$\begin{aligned} T &\subseteq \mathbb{N}_0, \mathbb{R}_+ && \text{(Zeit),} \\ T &\subseteq \mathbb{Z}^2 && \text{(räumliches Gitter),} \\ T &\subseteq \mathbb{R}^2 && \text{(kontinuierliche Teilmenge),} \\ T &\subseteq \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{N}_0 && \text{(Raum-Zeit).} \end{aligned}$$

- Definition: Stochastischer Prozess als Familie von Zufallsvariablen

Eine Familie $\{X_t, t \in T\}$ von Zufallsvariablen heißt stochastischer Prozess. Die Indexmenge T heißt Parameterraum, der Wertebereich S der Zufallsvariablen heißt Zustandsraum.

- Genauer nimmt man an:

$X_t : (\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow (S, \mathcal{S})$ Zufallsvariable für alle t

$\mathcal{S}$ σ -Algebra

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ Wahrscheinlichkeitsraum

$\Rightarrow X = \{\Omega, \mathcal{F}, P, \{X_t, t \in T\}\}$ stochastischer Prozess

1.2 Spezielle Stochastische Prozesse

1.2.1 Irrfahrten (Random Walks)

- Diskrete einfache Irrfahrt auf der Geraden:

- Start in $X_0 = 0$ (Zeit $t = 0$).

- Bewegung: ($t = 1, 2, \dots$)

- Ein Schritt nach rechts mit Wahrscheinlichkeit p

- Ein Schritt nach links mit Wahrscheinlichkeit q

- Verbleiben im Zustand mit Wahrscheinlichkeit r

- $$p + q + r = 1.$$

- X_t Position nach t -tem Schritt.

- Alternative Darstellung:

- $\{Z_t, t = 1, 2, \dots\}$ i.i.d. Folge von Zufallsvariablen für t -ten Schritt.
- $Z_t \in \{-1, 0, 1\}$

$$P(Z_t = -1) = q$$

$$P(Z_t = 0) = r$$

$$P(Z_t = 1) = p$$

- Definition von X_t :

$$X_0 = 0$$

$$X_t = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_t$$

bzw.

$$X_t = X_{t-1} + Z_t, \quad t \geq 1$$

- Formale Definition:

- Die Folge $X = \{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$, mit $X_t = X_{t-1} + Z_t$, heißt (einfache) Irrfahrt auf der Geraden.
- $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ ist ein stochastischer Prozess mit $T = \mathbb{N}_0$ und $S = \mathbb{Z}$.
- Zugrundeliegender Ergebnisraum Ω mit Ergebnissen ω :
 ω Folge der Realisierungen von $Z_1, Z_2, \dots$, z.B.

$$\begin{aligned}\omega &= (1, 1, -1, 1, 1, 0, 0, 1, -1, \dots) \\ &= (Z_1(\omega) = 1, Z_2(\omega) = 1, Z_3(\omega) = -1, \dots)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Omega = \{-1, 0, 1\}^{\mathbb{N}}.$$

- Die durch (t, X_t) gebildete Treppenfunktion heißt Pfad, Trajektorie oder Realisierung des Prozesses.

- Spezialfälle:

$$\begin{array}{ll} r = 0 & \text{kein Unentschieden} \\ p = q = \frac{1}{2} & \text{fairer Spiel, symmetrische Irrfahrt} \end{array}$$

- Modifikation: Absorbierende Schranken

Interpretation: Spieler A mit Anfangskapital $a > 0$

Spieler B mit Anfangskapital $b > 0$

X_t Gewinn von A nach t Spielen

$\{X_t = -a\}$ Ruin von A ("Gambler's ruin")

$\{X_t = b\}$ Ruin von B .

Ziel: Berechnung von Ruin- bzw. Gewinnwahrscheinlichkeiten.

Gewinnwahrscheinlichkeit bei $p = q = \frac{1}{2}$ ist

$$\text{für } A: P_A = \frac{a}{a+b} \quad \text{und für } B: P_B = \frac{b}{a+b}$$

Allgemeinere Gewinnwahrscheinlichkeiten $\Rightarrow$ Übung.

- Markov–Eigenschaft der diskreten Irrfahrt:

$$\begin{aligned} P(X_{t+1} = j \mid X_t = i, X_{t-1} = i_{t-1}, X_{t-2} = i_{t-2}, \dots, X_1 = i_1) = \\ P(X_{t+1} = j \mid X_t = i). \end{aligned}$$

Interpretation: Die Zukunft X_{t+1} ist bei bekannter Gegenwart X_t (bedingt) unabhängig von der Vergangenheit $X_{t-1}, \dots, X_1$.

- Ungerichtete Form der Markov–Eigenschaft:

$$P(X_t = i \mid X_{s \neq t}) = P(X_t = i \mid X_{t+1} = i_{t+1}, X_{t-1} = i_{t-1})$$

- Zwei-dimensionale symmetrische Irrfahrt

$$\begin{aligned}X_t &= (X_{1t}, X_{2t}) \in \mathbb{Z}^2 \\X_{t+1} &= X_t + Z_t ; \\Z_t &\in \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)\end{aligned}$$

mit

$$P \left(Z_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \dots = P \left(Z_n = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{4}$$

- Allgemeine Irrfahrt (Random Walk):

$\{Z_t, t \in \mathbb{N}\}$ iid Folge, Z_t beliebig verteilt.

- Gauß-Irrfahrt:

$\{Z_t, t \in \mathbb{N}\}$ iid $N(0, \sigma^2)$, "Gauß'sches Weißes Rauschen"

Markov–Eigenschaft:

$$f(x_t \mid X_{t-1} = x_{t-1}, \dots, X_1 = x_1) = f(x_t \mid X_{t-1} = x_{t-1}) \sim N(x_{t-1}, \sigma^2)$$

bzw. $X_t \mid X_{t-1}, \dots, X_1 \sim X_t \mid X_{t-1} \sim N(X_{t-1}, \sigma^2)$

- Autoregressiver Prozess der Ordnung 1 ($AR(1)$)

$$X_t = \rho X_{t-1} + Z_t, \quad Z_t \text{ i.i.d.}$$

- Autoregressiver Prozess der Ordnung p ($AR(p)$)

$$X_t = \rho_1 X_{t-1} + \dots + \rho_p X_{t-p} + Z_t, \quad Z_t \text{ i.i.d.}$$

- Gauß-Prozesse, falls Z_t i.i.d. $N(0, \sigma^2)$.

- Markov-Eigenschaft:

Für $AR(1)$:

$$X_t \mid X_{t-1}, \dots, X_1 \sim X_t \mid X_{t-1} \sim N(\rho X_{t-1}, \sigma^2)$$

Für $AR(p)$:

$$X_t \mid X_{t-1}, \dots, X_1 \sim X_t \mid X_{t-1}, \dots, X_{t-p} \sim N(\mu_t, \sigma^2)$$

mit

$$\mu_t = \rho_1 X_{t-1} + \dots + \rho_p X_{t-p}$$

- Räumliche Markov-Prozesse

$\{X_s, s = (i, j) \in \mathbb{Z}^2\}$ heißt räumlicher (Gitter-)Prozess oder Zufallsfeld.

Beispiele:

- $X_{ij} \in \{0, 1\}$ Indikatorvariablen, z.B.

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{archäologischer Fund in } (i, j) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- $X_s \in \{0, 1, 2, \dots\}$ Zählvariable, z.B. Anzahl von Krebserkrankungen in Landkreisen; irreguläres Gitter.
- X_{ij} stetig verteilt, z.B. Graustufe/Farbe in der Bildanalyse

- Räumliche Markov-Eigenschaft

$$f(x_{ij} | \{X_{kl}, (k, l) \neq (i, j)\}) = f(x_{ij} | \{X_{kl}, (k, l) \sim (i, j)\})$$

$\sim$: "Nachbar von"

1.2.2 Wiener Prozess

- Stochastisches Modell für die Brown'sche Bewegung (zeitstetige Irrfahrt kleiner Teilchen in homogener, ruhender Flüssigkeit).

Irrfahrt kommt durch zufälliges Zusammenstoßen mit Molekülen der Flüssigkeit zustande.

Parameterraum $T = \mathbb{R}_+$.

Zustandsraum $S = \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$).

Bezeichnung: $W = \{W_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ oder $\{W(t), t \in \mathbb{R}_+\}$

- Wichtiger Baustein zur Modellierung von Wertpapierpreisen mit Anwendung in der Optionsbewertung (Black-Scholes-Regel):

Bezeichne $P_0(t)$ den Preis eines risikolosen Wertpapiers (z.B. Sparguthaben) zum Zeitpunkt t . Bei stetiger Verzinsung mit konstantem Zinssatz r gilt:

$$\begin{aligned}P_0(t) &= P_0(0)e^{rt} \\ \ln P_0(t) &= \ln P_0(0) + rt\end{aligned}$$

$\implies$ loglinearer Ansatz für Aktienkurse:

$$\ln P(t) = \ln P(0) + rt + W(t),$$

$W(t)$ regelloser Fehler in stetiger Zeit.

- Wiener-Prozess als Grenzfall von Irrfahrten

$X(t)$ symmetrische diskrete Irrfahrt, $X(0) = 0$.

Bewegungen zu den Zeitpunkten $n\Delta t$, $n = 1, 2, \dots$ um $\pm\Delta x$.

$$\begin{aligned} X(t) &= \text{Lage des Teilchens für } t = n\Delta t \\ &= \sum_{k=1}^n Z_k \end{aligned}$$

$$Z_k \text{ i.i.d. mit } \begin{cases} P(Z_k = +\Delta x) = \frac{1}{2} \\ P(Z_k = -\Delta x) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(Z_k) &= 0 \\ \text{Var}(Z_k) &= (\Delta x)^2 \\ \implies E(X(t)) &= 0 \\ \text{Var}(X(t)) &= (\Delta x)^2 n = \underbrace{\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}}_{=:\sigma^2} t \end{aligned}$$

Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ ($\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0$), so dass

$$\sigma^2 := \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}, \quad 0 < \sigma^2 < \infty$$

konstant bleibt.

Zentraler Grenzwertsatz

$$\implies X(t) \sim N(0, \sigma^2 t) \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

- Vor dem Grenzübergang gilt
 - Zuwächse $X(t) - X(s)$, $X(v) - X(u)$, mit $u < v < s < t$ sind unabhängig (zusammengesetzt aus getrennten i.i.d. Teilsummen)
 - Zuwächse $X(t+s) - X(s)$ sind stationär (Verteilung hängt nur von der Zeitdifferenz ab):

$$X(t+s) - X(s) \sim X(t) - X(0) \sim N(0, \sigma^2 t)$$

- Plausibel: Unabhängigkeit und Stationarität der Zuwächse überträgt sich auf Grenzprozess für $n \rightarrow \infty$. Exakter Beweis aber schwierig.

$\Rightarrow$ Axiomatischer Zugang

- "Herleitung" des Wiener-Prozesses als Grenzfall von Irrfahrten funktioniert auch für allgemeine "symmetrische" Irrfahrten, z.B. mit

$$Z_k \sim N(0, \sigma^2 \Delta t), \quad t = n \Delta t$$

- Axiomatische Definition des Wiener-Prozesses

Ein stochastischer Prozess $W = \{W(t), t \in \mathbb{R}_+\}$, $S = \mathbb{R}$, heißt Wiener-Prozess, wenn gilt:

(W1) Zuwächse sind normalverteilt und stationär:

$$W(s+t) - W(s) \sim N(0, \sigma^2 t) \quad \text{für alle } s, t \geq 0$$

(W2) Für alle $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$, $n \geq 3$ sind die Zuwächse

$$W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$$

unabhängig

(W3) $W(0) = 0$

(W4) Pfade sind stetig.

- Bemerkungen:

- Für $\sigma^2 = 1$ heißt der Wiener-Prozess normiert.
- (W3) ist Anfangsbedingung. Addition von c liefert

$$\tilde{W}(t) = W(t) + c$$

mit $\tilde{W}(0) = c$.

- (W1), (W2), (W3) bestimmen die endlich-dimensionalen Verteilungen von

$$W(t_1), W(t_2), \dots, W(t_n) \quad \forall n \geq 1, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+.$$

- (W4) folgt nicht aus (W1) – (W3).

Man müsste sogar zeigen, dass (W4) mit (W1) – (W3) verträglich ist.

- Eindimensionale Verteilungen:

$$W(t) \sim N(0, \sigma^2 t) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

da

$$W(t) - W(0) = W(t) \sim N(0, \sigma^2 t)$$

nach (W1) und (W3).

- Bivariate Verteilungen:

$$\begin{pmatrix} W(s) \\ W(t) \end{pmatrix} \sim N(0, \Sigma), \quad 0 \leq s < t$$

mit

$$\Sigma = \sigma^2 \begin{pmatrix} s & s \\ s & t \end{pmatrix}.$$

Für s, t beliebig: $Cov(W(s), W(t)) = \min(t, s)\sigma^2$.

Zugehörige Dichte:

$$f_{s,t}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{s(t-s)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[\frac{x_1^2}{s} + \frac{(x_2 - x_1)^2}{t-s} \right] \right\}, \quad s < t$$

- Bedingte Dichten:

$$W(s) \mid [W(t) = b] \sim N\left(\frac{s}{t}b, \sigma^2\frac{s}{t}(t-s)\right), \quad s < t$$

$$W(t) \mid [W(s) = a] \sim N(a, \sigma^2(t-s))$$

- Allgemeine endlichdimensionale Verteilungen: Für $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$, $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(W(t_1), \dots, W(t_n))' \sim N(0, \sigma^2 \Sigma)$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & t_1 & \dots & t_1 \\ t_1 & t_2 & t_2 & \dots & t_2 \\ t_1 & t_2 & t_3 & \dots & t_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_1 & t_2 & t_3 & \dots & t_n \end{pmatrix}$$

Dichte:

$$\begin{aligned} f_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) &= f(x_1) f(x_2 \mid x_1) \cdot \dots \cdot f(x_n \mid x_{n-1}) \\ &= \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[\frac{x_1^2}{t_1} + \frac{(x_2 - x_1)^2}{t_2 - t_1} + \dots + \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{t_n - t_{n-1}} \right] \right\}}{(\sigma \sqrt{2\pi})^n \sqrt{t_1(t_2 - t_1) \cdot \dots \cdot (t_n - t_{n-1})}} \end{aligned}$$

Dies zeigt auch die Markoveigenschaft des Wiener Prozess.

- Pfadeigenschaften:
 - Stetig nach (W4).
 - In jedem endlichen Intervall von unbeschränkter Variation:

$t_0, t_1, \dots, t_n$ Gitter auf $[t_0, t_n]$, Schrittweite δ_n

$$\implies \sum_{k=1}^n |W(t_k) - W(t_{k-1})| \longrightarrow \infty, \quad \text{für } n \longrightarrow \infty$$

- Mit Wahrscheinlichkeit 1 nirgends differenzierbar. Plausibilitätserklärung:

Für den Differenzenquotienten gilt

$$\frac{W(t+h) - W(t)}{h} \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{|h|}\right)$$

d.h. die Varianz des Differenzenquotienten $\longrightarrow \infty$ für $h \rightarrow 0$.

Es gilt sogar

$$P \left\{ a \leq \frac{W(t+h) - W(t)}{h} \leq b \right\} \longrightarrow 0, \quad [a,b] \text{ endl. Intervall}$$

$\Rightarrow$ Differenzenquotienten kann nicht gegen endliche Zufallsvariable konvergieren.

1.2.3 Zählprozesse und Poisson-Prozess

- Allgemeine Notation für Zählprozesse:
 - $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ Stochastischer Prozess von Ereigniszeitpunkten, z.B.
 - ◇ Eintreten von Schadensfällen bei KFZ-Versicherung
 - ◇ Todesfälle in klinischer Studie
 - ◇ Ankünfte von Jobs bei Computer, von Kunden bei "Servicestelle", . . .
 - ◇ Kauf eines Produkts
 - ◇ Transaktionen an der Börse
 - $\{T_n, n \in \mathbb{N}\}$ Stochastischer Prozess von Verweildauern, Zwischenankunftszeiten, etc. mit

$$T_n = S_n - S_{n-1}$$

⇒ Zählprozess

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} I_{(0,t]}(S_n) = \text{Anzahl der Ereignisse in } (0, t].$$

- Vereinbarung: $T_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. keine gleichzeitigen Ereignisse.
- Pfade sind rechtsstetige Treppenfunktionen mit Sprunghöhe 1
- Verhältnis zwischen Zählprozess und Ereigniszeitpunkten:

$$S_n \leq t \Leftrightarrow N(t) \geq n$$

$$S_n \leq t < S_{n+1} \Leftrightarrow N(t) = n$$

$$N(t) = \max_n \{S_n \leq t\} = \min_n \{S_{n+1} > t\}$$

- Mehr zu Zählprozessen in Kapitel 7; hier: Poisson-Prozess als einfachster Zählprozess

- Definition: Zählprozess N mit unabhängigen und stationären Zuwächsen:

N besitzt unabhängige Zuwächse $:\Leftrightarrow \forall n \forall t_0 < t_1 < \dots < t_n$

$$N(t_1) - N(t_0), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1}) \quad \text{unabhängig}$$

N besitzt stationäre Zuwächse $:\Leftrightarrow \forall 0 \leq t_1 < t_2, s > 0$

$$N(t_2) - N(t_1) \text{ und } N(t_2 + s) - N(t_1 + s) \text{ identisch verteilt}$$

- Definition Poisson-Prozess:

Ein Zählprozess $N = \{N(t), t \geq 0\}$ heißt Poisson-Prozess $:\Leftrightarrow$

(1) N hat unabhängige und stationäre Zuwächse

$$(2) P\{N(t+h) - N(t) \geq 2\} = o(h)$$

$$P\{N(t+h) - N(t) = 1\} = \lambda h + o(h)$$

- Eigenschaft (2) lässt sich ersetzen durch
 - Sprünge der Pfade haben (mit Wkeit 1) die Höhe 1,
 - keine gleichzeitigen Ereignisse,
 - Zählprozess nach unserer Übereinkunft.
- Für einen Poisson-Prozess N gilt

$$P(N(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

d.h.

$$N(t) \sim Po(\lambda t)$$

mit Intensität oder Rate $\lambda > 0$.

Bemerkung: (2) kann auch durch $N(t) \sim Po(\lambda t)$ ersetzt werden

- Der Poisson-Prozess ist ein homogener (stationärer) Markov-Prozess, d.h. für $s_0 < \dots < s_n < s < t$ und $j \geq i$ gilt

$$\begin{aligned} P(N(t) = j \mid N(s) = i, N(s_n) = i_n, \dots, N(s_1) = i_1) &= P(N(t) = j \mid N(s) = i) \\ &= P(N(t - s) = j - i) \\ &= \frac{(\lambda(t - s))^{j-i}}{(j - i)!} e^{-\lambda(t-s)} \end{aligned}$$

- Bemerkung: Jeder Prozess mit unabhängigen Zuwächsen ist ein Markov-Prozess.
- N ist Poisson-Prozess mit Rate $\lambda \Leftrightarrow$ Die Zwischenzeiten T_n sind i.i.d. $\text{Ex}(\lambda)$ verteilt (exponentialverteilt mit Parameter λ).
- Für die Wartezeit auf das n -te Ereignis $S_n = T_1 + \dots + T_n$ gilt

$$\begin{aligned} S_n &\sim \text{Ga}(n, \lambda) \\ f_{S_n}(t) &= \frac{e^{-\lambda t} \lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}E(S_n) &= \frac{n}{\lambda}, \\Var(S_n) &= \frac{n}{\lambda^2}, \\Modus(S_n) &= \frac{n-1}{\lambda}.\end{aligned}$$

- Vorwärtsrekurrenzzeit:

$$\begin{aligned}V(t) &= S_{N(t)+1} - t \\P(V(t) \leq x) &= F_{V(t)}(x) = 1 - e^{-\lambda x}\end{aligned}$$

d.h. $V(t) \sim Ex(\lambda)$.

Bemerkung: $V(t) \sim Ex(\lambda)$ unabhängig von gewähltem t folgt aus "Gedächtnislosigkeit" der Exponentialverteilung:

$$X \sim Ex(\lambda) \Rightarrow P(X \leq t + x \mid X > t) = P(X \leq x).$$

- Rückwärtsrekurrenzzeit

$$U(t) = t - S_{N(t)}$$

$$P(U(t) = t) = e^{-\lambda t}$$

$$P(U(t) \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad 0 \leq x < t$$

Bemerkung: $U(t) + V(t) = T_{N(t)+1} = S_{N(t)+1} - S_{N(t)}$

- Sampling Paradoxon: $N(t)$ in $S_{N(t)}$ ist zufälliger Index; $T_{(N(t)+1)} \neq T_n$, n fest.

Für fest vorgegebenes t gilt

$$E(T_{N(t)+1}) = E(U(t)) + E(V(t)) = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t}) + \frac{1}{\lambda} > \frac{1}{\lambda} = E(T_n)$$

Plausibilitätserklärung: Bei fest vorgegebenem t ist $T_{N(t)+1}$ die zufällige Länge der enthaltenen Zwischenzeit. Im Schnitt werden längere Intervalle dabei favorisiert.

- Überlagerung von Poisson-Prozessen

$$\left. \begin{array}{ll} L = \{L(t), t \geq 0\} & \text{PP mit Rate } \lambda \\ M = \{M(t), t \geq 0\} & \text{PP mit Rate } \mu \end{array} \right\} \text{unabhängig}$$

Dann heißt $N = \{N(t), t \geq 0\}$ mit

$$N(t, \omega) = L(t, \omega) + M(t, \omega)$$

Überlagerung von L und M . Es gilt: N ist Poisson-Prozess mit Rate $\lambda + \mu$.

- Zerlegung von Poisson-Prozessen:

N Poisson-Prozess mit Rate λ . Bei Eintritt eines Ereignisses wird ein binomisches Experiment $P(X = 1) = p$, $P(X = 0) = 1 - p$, unabhängig von N , durchgeführt.

$$X = 1 \quad : \quad \text{Typ-1 Ereignis} \Rightarrow \text{Zählprozess } M$$

$$X = 0 \quad : \quad \text{Typ-0 Ereignis} \Rightarrow \text{Zählprozess } L$$

Es gilt: M und L sind unabhängige PP mit Raten λp und $\lambda(1 - p)$.

- Typisches Beispiel: Netzwerke, etwa Straßensystem.
- Verallgemeinerung: Räumlicher Poisson-Prozess
 - Anzahl der Ereignisse in einem Gebiet A ist Poisson-verteilt mit Erwartungswert $\lambda \cdot \text{Fläche}(A)$.
 - Anzahl der Ereignisse in zwei nicht überlappenden Gebieten A_1 und A_2 sind unabhängig.
- Erweiterung I: Inhomogener Poisson-Prozess

Ein Zählprozess $N = \{N(t), t \geq 0\}$ heißt nichtstationärer (inhomogener) Poisson-Prozess mit Rate (Intensitätsfunktion) $\lambda(t)$, $t \geq 0 : \Leftrightarrow$

(1) N hat unabhängige Zuwächse

$$(2) \begin{aligned} P(N(t+h) - N(t) \geq 2) &= o(h) \\ P(N(t+h) - N(t) = 1) &= \lambda(t)h + o(h) \end{aligned}$$

Es lässt sich zeigen:

$$\begin{aligned} P(N(t+s) - N(t) = n) &= \exp\left(-\int_t^{t+s} \lambda(u) du\right) \frac{\left(\int_t^{t+s} \lambda(u) du\right)^n}{n!} \\ &= \exp(-(\Lambda(t+s) - \Lambda(t))) \frac{(\Lambda(t+s) - \Lambda(t))^n}{n!} \end{aligned}$$

mit $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du$ als kumulierte Rate, d.h.

$$N(t+s) - N(t) \sim Po\left(\int_t^{t+s} \lambda(s) ds\right)$$

- Erweiterung II: Bewerteter (Compound) Poisson-Prozess

N Poisson-Prozess, $\{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$ von N unabhängige i.i.d. Folge.

Dann heißt $X = \{X(t), t \geq 0\}$ mit

$$X(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n$$

bewerteter Poisson-Prozess.

- Beispiele:
 - Schadensprozesse

$N(t)$	Prozess der Schadensanzahl,
$\{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$	zugehörige Schadenshöhen,
$X(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n$	Gesamtschaden in $[0, t]$.

– Klassisches Versicherungsmodell von Cramér–Lundberg

$$\begin{array}{ll} R(t) = c_0 + c_1 t - X(t) & \text{Risikoprozess,} \\ c_1 & \text{Prämienintensität,} \\ X(t) & \text{bewerteter Poisson-Prozess mit Intensität } \lambda, \\ Y_n \text{ i.i.d. } \sim F & \text{Schadenshöhen.} \end{array}$$

Ziel: Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

$$P(R(t) > 0 \ \forall t) = ?$$

oder

$$P(R(t) \leq 0) \leq ?$$