Kapitel 5

Erneuerungs- und Semi-Markov-Prozesse

5.1 Erneuerungsprozesse

- Definition: Erneuerungsprozess

Sei $\{T_n, n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge unabhängiger, nichtnegativer Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F , mit $F(0) < 1$. Dann heißt die Folge $\{S_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ mit

$$S_0 := 0, \quad S_{n+1} = S_n + T_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Erneuerungsprozess. Sei

$$N(t) = \max_{n \in \mathbb{N}_0} \{n : S_n \leq t\}$$

die Anzahl von Erneuerungen im Intervall $[0, t]$. Dann heißt $N = \{N(t), t \geq 0\}$ Erneuerungszählprozess, oft auch einfach Erneuerungsprozess.

- Beispiele:

- Zuverlässigkeitstheorie: Ein bestimmter Bestandteil eines technischen Gerätes werde sofort nach seinem Ausfall durch ein neues Gerät ersetzt. Die $T_1, T_2, \dots$ sind dann die Lebensdauern des ersten, zweiten, $\dots$ Gerätes. $N(t)$ gibt die Anzahl von Erneuerungen bis t an.

- Marktforschung: Ein bestimmtes Produkt wird nach seinem Verbrauch erneut gekauft. Der Erneuerungsprozess heißt in diesem Zusammenhang Wiederholkaufprozess.
 - Versicherung: $S_1, S_2, \dots$ sind die Zeitpunkte, zu denen Schadensfälle auftreten. $N(t)$ ist die Anzahl der Schadensfälle.
 - Warteschlangen: Der Ankunftsprozess von Kunden (wie in den Beispielen des letzten Kapitels) bildet einen Erneuerungsprozess.
 - Klinische Studien, Survivalanalyse: In klinischen Studien sind $T_1, T_2, \dots$ z.B. die Zeitdauern nach denen epileptische Anfälle, Rückfälle, etc. auftreten. Ein wichtiger Spezialfall ist die Survival- oder Überlebenszeitanalyse: Betrachtet wird für (homogene) Gruppen von Patienten die Überlebenszeit.
- Die T_n nennt man auch Lebensdauern, die S_n Erneuerungszeitpunkte. Dabei wird üblicherweise S_0 nicht zu den Erneuerungszeitpunkten gezählt.
 - Für die Lebensdauer ist auch $P\{T_n = \infty\} = 1 - F(\infty) > 0$, also $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) < 1$, zugelassen.

- Die Annahme, dass T_1 dieselbe Verteilung wie $T_2, T_3, \dots$ besitzt, kann so gedeutet werden, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ gerade eine Erneuerung stattgefunden hat. Besitzt T_1 eine von $T_2, T_3, \dots$ verschiedene Verteilung, so spricht man vom modifizierten Erneuerungsprozess.
- Die T_n können diskret oder stetig sein. In diesem Kapitel werden nur stetige Lebensdauern betrachtet, d.h. F besitzt eine Dichte f .
- Beispiele für Lebensdauerverteilungen:
 - Exponentialverteilung ergibt den Spezialfall des Poisson-Prozesses.
 - Weibull-Verteilung:

$$f(t) = \lambda \alpha (\lambda t)^{\alpha-1} \exp(-(\lambda t)^\alpha), \quad \alpha > 0, \lambda > 0,$$

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right),$$

$$\text{Var}(T) = \frac{1}{\lambda^2} \left[\Gamma\left(\frac{\alpha+2}{\alpha}\right) - \left\{ \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right) \right\}^2 \right].$$

Für $\alpha = 1$ ergibt sich die Exponentialverteilung als Spezialfall.

– Gammaverteilung:

$$\begin{aligned}f(t) &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot t^{\alpha-1} \exp(-\lambda t), \quad \alpha > 0, \lambda > 0, \\E(T) &= \frac{\alpha}{\lambda}, \\Var(T) &= \frac{\alpha}{\lambda^2}, \\Mod(T) &= \frac{(\alpha - 1)}{\lambda}, \quad \text{für } \alpha > 1.\end{aligned}$$

Für $\alpha = 1$ ergibt sich wieder die Exponentialverteilung als Spezialfall.

– Log-Normalverteilung:

$$\begin{aligned}T &= \exp(X), \quad X \sim N(\mu, \sigma^2). \\f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma t}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(\log(t) - \mu)^2}{\sigma^2}\right), \\E(T) &= \exp(\mu + 0.5\sigma^2), \\Var(T) &= \exp(2\mu + \sigma^2) \cdot [\exp(\sigma^2) - 1].\end{aligned}$$

- Definition: Survivorfunktion

Die Survivorfunktion

$$S(t) = P(T \geq t)$$

ist die unbedingte Wahrscheinlichkeit bis zum Zeitpunkt t zu überleben. Für stetige Verweildauern (mit $F(0) = 0$) gilt $S(t) = 1 - F(t)$.

- Definition: (kumulierte) Hazardrate

Die Hazardrate ist die infinitesimale Rate für einen Ausfall zum Zeitpunkt t , gegeben Überleben bis zum Zeitpunkt t :

$$\lambda(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T \leq t + h \mid T \geq t)}{h}$$

In $o(h)$ -Schreibweise: Die Wahrscheinlichkeit für einen Ausfall im Intervall $[t, t + h]$, gegeben Überleben bis zum Zeitpunkt t , ist

$$P(t \leq T \leq t + h \mid T \geq t) = \lambda(t)h + o(h).$$

Das Integral

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du$$

wird als kumulierte Hazardrate bezeichnet.

- Zusammenhänge:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{f(t)}{S(t)}$$

$$S(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(u) du\right) = \exp(-\Lambda(t))$$

$$f(t) = \lambda(t) \cdot S(t) = \lambda(t) \exp\left(-\int_0^t \lambda(u) du\right)$$

- Beispiele:

- Exponentialverteilung:

$$\lambda(t) = \lambda$$

- Weibull-Verteilung:

$$\lambda(t) = \lambda\alpha(\lambda t)^{\alpha-1}$$

- Interessierende Größen in der klassischen Theorie der Erneuerungsprozesse:

- Die Verteilungen von S_n und $N(t)$
- Die erwartete Zahl $R(t) = E(N(t))$ von Erneuerungen bis t . $R(t)$ heißt Erneuerungsfunktion. Existiert eine nichtnegative Funktion $r(t)$ für die gilt

$$R(t) = \int_0^t r(u)du,$$

so heißt diese Erneuerungsdichte.

- Verteilung von S_n :

$$F_n(t) := P(S_n \leq t) = \int_{[0,t]} F_{n-1}(t-x) dF(x), \quad t \geq 0,$$

mit $F_1(t) := F(t)$. In der Schreibweise mit dem Faltungssymbol gilt also

$$F_n = F * F_{n-1} = F^{n*} = F * \dots * F$$

Für die Dichte $f_n(t)$ von $F_n(t)$ gilt

$$f_n(t) = \int_0^t f_{n-1}(t-x) f(x) dx, \quad f_1(t) := f(t)$$

- Verteilung von $N(t)$:

$$P(N(t) = n) = F_n(t) - F_{n+1}(t), \quad n = 0, 1, \dots, \quad F_0(t) \equiv 1.$$

- Erneuerungsfunktion:

$$E(N(t)) = R(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t).$$

$R(t)$ ist monoton wachsend und rechtsseitig stetig.

- Erneuerungsichte:

$$r(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t).$$

- Die Faltungen und unendlichen Summen sind in konkreten Beispielen oft schwierig zu berechnen. $\Rightarrow$ Betrachte das asymptotische Verhalten.
- Definition: Rekurrente Erneuerungsprozesse
Ein Erneuerungsprozess heißt rekurrent, falls gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1.$$

Ansonsten treten mit positiver Wahrscheinlichkeit ab einem gewissen Erneuerungszeitpunkt keine weiteren Erneuerungen mehr auf.

- Grenzwertsätze:

Für einen rekurrenten Erneuerungsprozess mit stetigen T_n und $\mu = E(T_n)$, $\sigma^2 = \text{Var}(T_n) < \infty$ gelten:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu} \quad \text{mit Wahrscheinlichkeit 1,}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R(t)}{t} = \frac{1}{\mu}, \quad (\text{elementares Erneuerungstheorem})$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(R(t) - \frac{t}{\mu} \right) = \frac{\sigma^2 - \mu^2}{2\mu^2},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P \left(\frac{N(t) - \frac{t}{\mu}}{\frac{\sigma}{\mu} \sqrt{\frac{t}{\mu}}} \leq x \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt.$$

Gemäß der letzten Aussage ist $N(t)$ für große t approximativ normalverteilt mit Erwartungswert $\frac{t}{\mu}$ und Varianz $\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}$.

- Statistische Inferenz:
 - $F(t)$ bzw. $f(t)$ nonparametrisch durch die empirische Verteilungsfunktion bzw. Kerndichteschätzer schätzen.
 - Parametrische Verteilungen $F(t; \theta)$: θ mit ML schätzen.
 - Beim Vorliegen von Zensierung: Lebensdauer- und Ereignisanalyse.
 - Tests auf Unabhängigkeit der Verweildauern: Basierend auf serieller Korrelation oder spektraltheoretischen Methoden.

5.2 Semi-Markov-Prozesse

- Pfadstruktur wie bei Markov-Prozessen:

$Y_n = X(S_n)$ Zustand nach dem n -ten Übergang, $n = 0, 1, \dots$
 T_{n+1} Verweildauer im Zustand Y_n
 S_n Zeitpunkt des n -ten Übergangs.

- Definition: Markov-Erneuerungsprozess , Semi-Markov-Prozess

$\{Y_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ sei eine Folge von Zufallsvariablen mit abzählbarem Zustandsraum.

$\{S_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ sei eine Folge nichtnegativer Zufallsvariablen mit $0 =: S_0 \leq S_1 \leq \dots$

Der Prozess $(Y, S) = \{(Y_n, S_n), n \in \mathbb{N}_0\}$ heißt Markov-Erneuerungsprozess $:\Leftrightarrow$
 $\forall t, s, s_{n-1}, \dots \in \mathbb{R}_+, \forall j, i_n, \dots, i_0$ gilt

$$\begin{aligned}
 P(Y_{n+1} = j, T_{n+1} \leq t | Y_n = i, Y_{n-1} = i_{n-1}, \dots, Y_0 = i_0, S_n = s, S_{n-1} = s_{n-1}, \dots) \\
 = P(Y_{n+1} = j, T_{n+1} \leq t | Y_n = i).
 \end{aligned}$$

Ist (Y, S) ein Markov-Erneuerungsprozess, so heißt $X = \{X(t), t \geq 0\}$ der zu (Y, S) gehörige Semi-Markov-Prozess : $\Leftrightarrow$

$$X(t) = Y_n \quad \text{für} \quad S_n \leq t < S_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- Interpretation: Die Folge $\{Y_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ der Zustände bildet eine Markov-Kette, während die Ereigniszeitpunkte S_n , durch einen separaten Wahrscheinlichkeitsmechanismus beschrieben werden. Die Markov-Eigenschaft gilt nur noch bei Bedingungen auf $X(S_n) = i$, d.h. bedingt auf $t = S_n$, nicht jedoch für beliebige Zeitpunkte.
- Definition: Homogener Semi-Markov-Prozess
Gilt unabhängig von n

$$P(Y_{n+1} = j, S_{n+1} - S_n \leq t | Y_n = i) = P(Y_1 = j, S_1 \leq t | Y_0 = i) =: Q_{ij}(t),$$

so heißt der Semi-Markov-Prozess homogen. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten $Q_{ij}(t)$ heißen Semi-Markov-Übergangswahrscheinlichkeiten, $Q(t) = (Q_{ij}(t))$ Semi-Markov-Übergangsmatrix.

- Im Folgenden betrachten wir nur homogene Semi-Markov-Prozesse.

- Alternativ kann ein Semi-Markov-Prozess auch über die (übergangsspezifischen) Hazardraten beschrieben werden:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{ij}(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(Y_{n+1} = j, t \leq T_{n+1} \leq t+h \mid Y_n = i, T_{n+1} \geq t)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(Y_{n+1} = j, t \leq T_{n+1} \leq t+h \mid Y_n = i)}{h \cdot P(T_{n+1} \geq t \mid Y_n = i)} \\
 &= \frac{q_{ij}(t)}{1 - Q_i(t)}
 \end{aligned}$$

mit Dichte $q_{ij}(t)$ zu $Q_{ij}(t)$, d.h.

$$q_{ij}(t) = \frac{\partial Q_{ij}(t)}{\partial t}$$

- Verteilung der Verweildauer in einem Zustand i :

$$Q_i(t) := \sum_{j \in S} Q_{ij}(t) = P(T_{n+1} \leq t \mid Y_n = i) = P(S_1 \leq t \mid Y_0 = i)$$

- Im Folgenden gelte stets

$$Q_i(0) < 1 \text{ und } \lim_{t \rightarrow \infty} Q_i(t) = 1$$

(keine “Explosion” und keine absorbierenden Zustände).

- Beschreibung über Hazardraten:

$$\lambda_i(t) = \frac{q_i(t)}{1 - Q_i(t)}, \quad q_i(t) \text{ Dichte zu } Q_i(t).$$

- Struktur von Semi-Markov-Prozessen:

$\{Y_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ bildet eine homogene Markov-Kette mit Übergangsmatrix

$$Q = (q_{ij}), \quad q_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} Q_{ij}(t).$$

Die bedingte Verteilungsfunktion der Verweildauer T_{n+1} bedingt auf den Übergang $Y_n = i$ und $Y_{n+1} = j$ ist

$$G_{ij}(t) = P(T_{n+1} \leq t \mid Y_n = i, Y_{n+1} = j) = \frac{Q_{ij}(t)}{q_{ij}}.$$

(Für $q_{ij} = 0$ setze $G_{ij}(t) = 0$.)

- Beispiel: Markov-Erneuerungsprozess mit

$$Q(t) = (Q_{ij}(t)), \quad i, j = 1, 2$$

und

$$Q_{11}(t) = 0.6(1 - \exp(-5t))$$

$$Q_{12}(t) = 0.4(1 - \exp(-2t))$$

$$Q_{21}(t) = 0.5 - 0.2 \exp(-3t) - 0.3 \exp(-5t)$$

$$Q_{22}(t) = 0.5 - 0.5 \exp(-2t) - t \exp(-2t)$$

1. Verteilungsfunktion der Verweildauer in i

$$Q_1(t) = 1 - 0.6 \exp(-5t) - 0.4 \exp(-2t)$$

$$Q_2(t) = 1 - 0.2 \exp(-3t) - 0.5 \exp(-2t) - 0.3 \exp(-5t) - t \exp(-2t)$$

2. Übergangsmatrix der eingebetten Markov-Kette

$$Q = \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

3. Bedingte Verteilungsfunktionen

$$\begin{aligned} G_{ij}(t) &= P(T_{n+1} \leq t \mid Y_n = i, Y_{n+1} = j) \\ &= \frac{Q_{ij}(t)}{q_{ij}} \end{aligned}$$

$$G_{11}(t) = 1 - \exp(-5t)$$

$$G_{12}(t) = 1 - \exp(-2t)$$

$$G_{21}(t) = 1 - 0.4 \exp(-3t) - 0.6 \exp(-5t)$$

$$G_{22}(t) = 1 - \exp(-2t) - 2t \exp(-2t)$$

4. Hazardrate

$$\lambda_{ij}(t) = \frac{q_{ij}(t)}{1 - Q_i(t)}$$

$$\begin{aligned} q_{12}(t) &= \frac{\partial Q_{12}(t)}{\partial t} \\ &= 0.4 \cdot 2 \exp(-2t) \\ &= 0.8 \exp(-2t). \end{aligned}$$

$$1 - Q_1(t) = 0.6 \cdot \exp(-5t) + 0.4 \cdot \exp(-2t).$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \lambda_{12}(t) &= \frac{0.8 \exp(-2t)}{0.6 \exp(-5t) + 0.4 \exp(-2t)} \\ &= \frac{2}{1 + 1.5 \exp(-3t)}.\end{aligned}$$

5. Erwartete Verweildauern

$$\begin{aligned}\mu_i &= \int_0^{\infty} [1 - Q_i(t)] dt \\ \mu_1 &= \int_0^{\infty} 0.6 \exp(-5t) dt + \int_0^{\infty} 0.4 \exp(-2t) dt \\ &= 0.6 \left[-\frac{1}{5} \exp(-5t) \right]_0^{\infty} + 0.4 \left[-\frac{1}{2} \exp(-2t) \right]_0^{\infty} \\ &= 0.6 \cdot \frac{1}{5} + 0.4 \cdot \frac{1}{2} = 0.32\end{aligned}$$

- Algorithmus zur Simulation von Semi-Markov-Prozessen:
 1. Simuliere die Markov-Kette Y gemäß Übergangsmatrix (q_{ij})
 2. Simuliere dann die Verweildauern T_n gemäß den Verteilungen $G_{ij}(t)$.
- Markov-Ketten, Markov-Prozesse, Erneuerungsprozesse als Spezialfälle:
 - Ein Erneuerungsprozess ergibt sich mit $S = \{1\}$ und $Q_{11}(t) = F(t)$.
 - Eine Markov-Kette erhält man durch die Wahl

$$Q_{ij}(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 1 \\ q_{ij} & \text{für } t \geq 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow T_1 = T_2 = \dots = 1$ deterministische Verweildauern.

- Mit $G_{ij}(t) = 1 - \exp(-\lambda_i t)$ $t \geq 0$ und

$$q_{ii} = \begin{cases} 0, & i \text{ stabil} \\ 1, & i \text{ absorbierend} \end{cases}$$

erhält man einen Markov-Prozess.

- Rekurrenzeigenschaften und Irreduzibilität eines Semi-Markov-Prozesses leiten sich aus den entsprechenden Eigenschaften der Markovkette Y ab.

Der SMP heißt aperiodisch, wenn für alle i die Zwischenzeiten T_{ii} zwischen aufeinanderfolgenden Besuchen in i nicht gitterförmig sind, d.h. es gibt kein $d \geq 0$ mit $\sum_{n=0}^{\infty} P(T_{ii} = nd) = 1$. (Dies ist insbesondere bei stetigen Verweildauern erfüllt.)

- Grenzwertsatz:

Der Semi-Markov-Prozess sei aperiodisch, irreduzibel und positiv-rekurrent. Dann gilt für die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij}(t) = P(X(t) = j | Y_0 = i)$ und die Zustandswahrscheinlichkeit $p_j(t) = P(X(t) = j)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_j(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = \frac{\nu_j \mu_j}{\sum_{i \in S} \nu_i \mu_i},$$

mit strikt positiver stationärer Verteilung ν der eingebetteten Markov-Kette Y , d.h.

$$\nu = \nu Q, \quad \nu > 0, \quad \text{sowie} \quad \mu_i = \int_0^{\infty} t q_i(t) dt = \int_0^{\infty} (1 - Q_i(t)) dt.$$

- Vergleich mit Markov-Prozessen:

$$\mu_i = \frac{1}{\lambda_i}.$$

- Statistische Inferenz:

Im Vergleich zu Markov-Prozess sind statt Parametern λ_i der Exponentialverteilungen die entsprechenden Verweildauern parametrisch oder nichtparametrisch zu schätzen sowie die Übergangsmatrix Q der eingebetteten Markovkette.

Moderne Inferenzverfahren benutzen das Instrumentarium von Zählprozessen (Kapitel 7) um die (übergangsspezifischen) Hazardraten $\lambda_{ij}(t)$ als Funktionen von t zu schätzen.