

Aufgabe 1

Schreiben Sie in R eine Funktion, die die Pfade der diskreten einfachen Irrfahrt auf der Geraden für gegebene Wahrscheinlichkeiten p , q und r (mit $p + q + r = 1$) sowie gegebene Länge n simuliert und visualisiert. Testen Sie Ihr Programm mit verschiedenen Kombinationen für p , q und r und visualisieren Sie die Pfade. Wie müsste das Programm verändert werden, um eine diskrete Irrfahrt mit absorbierenden Schranken zu simulieren?

Aufgabe 2

Es sei der folgende Pfad einer einfachen Irrfahrt gegeben:

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow -1 \rightarrow -2$$

- Stellen Sie die Likelihood $L(p, q, r | \text{Daten})$ auf.
- Bestimmen Sie die Maximum-Likelihood-Schätzer \hat{p}_{ML} , \hat{q}_{ML} und \hat{r}_{ML} .
- Wie sehen die ML-Schätzer für eine allgemeine Realisation X_0, \dots, X_n aus?
- Schreiben Sie in R eine Funktion, die für einen gegebenen Pfad die ML-Schätzer berechnet und testen Sie diese anhand der in Aufgabe 1 simulierten Irrfahrten.

Aufgabe 3

Modifizieren Sie Ihre Funktion aus Aufgabe 1 derart, dass anstelle der konstanten Schrittweiten und Zeitintervalle von 1 variable Sprünge Δx sowie Zeitintervalle Δt zugelassen sind. Benutzen Sie dazu die Parametrisierung

$$\Delta x = \frac{\sigma}{\sqrt{c}} \quad \text{und} \quad \Delta t = \frac{1}{c},$$

wobei σ und c bekannte Parameter sind, die Sie mit Ihrer Funktion variieren können. Visualisieren Sie die Pfade insbesondere für $p = q = \frac{1}{2}$ und $c \rightarrow \infty$. Welche Art von stochastischem Prozess ergibt sich in diesem Fall?