Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass die bedingte Verteilung der Ankunftszeit $S_1 \,|N(t) = 1$ bei einem homogenen Poisson-Prozess einer Gleichverteilung auf $[0, t]$ entspricht.

Hinweis: Bestimmen Sie dazu $P(S_1 \leq s \,|N(t) = 1)$, $s < t$.

Aufgabe 2

Gegeben seien unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen Z_t, $t \in \mathbb{N}_0$, mit $\mathbb{E}(Z_t) = 0$ und $\mathrm{Var}(Z_t) = 1$. Der stochastische Prozess $\{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ sei wie folgt definiert:

$$X_t = \frac{1}{2}(Z_t - Z_{t-1})$$

(a) Berechnen Sie $\mathbb{E}(X_t)$, $\mathrm{Var}(X_t)$ und $\mathrm{Cov}(X_t, X_{t-1})$.

(b) Berechnen Sie Kovarianz- und Korrelationsfunktion von X_t und zeigen Sie damit, dass X_t schwach stationär ist.

Aufgabe 3

Gegeben sei eine homogene Markov-Kette 1. Ordnung $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ mit Zustandsraum $S = \{A, B\}$ und der folgenden Übergangsmatrix:

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Die Startverteilung sei gegeben durch $P(X_0 = A) = 0.2$ und $P(X_0 = B) = 0.8$.
Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

(a) $P(X_3 = A)$

(b) $P(X_3 = A|X_0 = A)$

(c) $P(X_3 = A|X_1 = B, X_0 = A)$

(d) $P(X_3 = A|X_2 = B, X_1 = B, X_0 = A)$

(e) $P(X_6 = A|X_3 = A)$

(f) $P(X_3 = A|X_6 = A)$