Aufgabe 1

Gegeben sei eine homogene Markov-Kette $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ mit dem Zustandsraum $S = \{A, B, C\}$ und der folgenden Übergangsmatrix:

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & p_{AB} & p_{AC} \\ 0 & p_{BB} & p_{BC} \\ p_{CA} & 0 & p_{CC} \end{pmatrix} \end{array} .$$

a) Wie sind die Übergangswahrscheinlichkeiten p_{AB}, p_{AC}, p_{BB}, p_{BC}, p_{CA} und p_{CC} zu wählen, damit $\boldsymbol{P}$ wohldefiniert ist?

b) Zeichnen Sie für X den Erreichbarkeitsgraphen, falls alle unbekannten Übergangswahrscheinlichkeiten ungleich 0 sind.

c) Für welche Werte von p_{BB} und p_{CC} ist die Markov-Kette X **nicht** irreduzibel?

d) Sei jetzt $\boldsymbol{P}$ wohldefiniert und $p_{AB} = p_{AC}$. Wie sind p_{BB}, p_{BC}, p_{CA} und p_{CC} zu wählen, damit die stationäre Verteilung von X existiert und einer diskreten Gleichverteilung entspricht?

e) Für welche Werte von p_{BB} und p_{CC} könnte es sich bei X um die eingebettete Markov-Kette eines irreduziblen, rekurrenten Markov-Prozesses handeln? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2

Es soll ein Metropolis - Algorithmus konstruiert werden, der gegen die folgende diskrete Verteilung konvergiert:

$$\boldsymbol{\pi}(x) \;=\; (0.3, 0.1, 0.6)\,.$$

a) Berechnen Sie die Akzeptanzwahrscheinlichkeiten $\alpha(x, y)$ bei Verwendung der Vorschlagsdichte

$$Q = \begin{pmatrix} 1-2q & q & q \\ q & 1-2q & q \\ q & q & 1-2q \end{pmatrix} \quad , \quad \text{mit } q \in (0, 0.5)$$

sowie die übergangsmatrix $\boldsymbol{P}$ der sich daraus ergebenden Markov-Kette.

b) Vergewissern Sie sich, dass $\boldsymbol{P}$ tatsächlich $\boldsymbol{\pi}(x)$ als stationäre Verteilung hat.

c) Simulieren Sie die resultierende Markov-Kette in R. Welche Werte von q erscheinen Ihnen als besonders günstig?

d) Geben Sie eine nicht-triviale (d.h. nicht diagonale) Vorschlagsdichte Q an, bei der die entstehende Markov-Kette nicht irreduzibel ist.