

### Aufgabe 1

Ein Sportfischer fährt am Wochenende zum Angeln an einen kleinen Weiher. In diesem Weiher befinden sich am frühen Morgen genau 10 Fische. Wenn noch  $n$  Fische im Weiher schwimmen, so ist die Zeit bis zum Anbeißen des nächsten Fisches exponentialverteilt mit dem Parameter  $n \cdot \mu$ , wobei  $\mu = 0.2$  und  $n = 1, \dots, 10$  gilt.

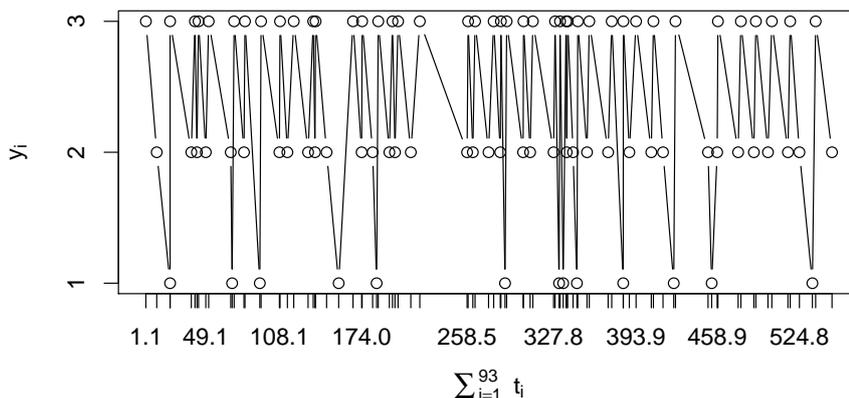
- (a) Welchem Prozess folgt die Anzahl der Fische im Weiher und welchem im Fangeimer?
- (b) Geben Sie für diesen Prozess die Intensitätsmatrix  $\mathbf{\Lambda}$  und die Übergangsmatrix  $\mathbf{Q}$  der eingebetteten Markov-Kette an.
- (c) Wie viel Zeit verstreicht im Mittel, bis der Sportangler genau 5 Fische bzw. alle 10 Fische gefangen hat?

Aufgabe 2

Der Schlaf des Menschen lässt sich in drei verschiedene Phasen einteilen:

Kodierung	Beschreibung
1	REM
2	Non-REM
3	Wach

Gehen Sie von Wertepaaren  $(y_i, t_i)$  für  $i = 1, \dots, 93$  aus, die den Schlafverlauf eines 46-jährigen Mannes beschreiben, wobei  $t_i$  die Verweildauer im  $i$ -ten Zustand (in Minuten) bezeichne. Dabei wechselt der Schlafverlauf 13-mal ausgehend von der REM-Phase, 37-mal ausgehend von der Non-REM-Phase und 42-mal aus der Wach-Phase. Im Folgenden soll die Zeitreihe als (Realisation eines diskreten Markov-Prozesses aufgefasst werden. Eine graphische Visualisierung der Aufzeichnungen ergibt folgendes Bild des Schlafverlaufs.



Eine genauere Aufschlüsselung der Daten ergibt folgende Erkenntnisse:

- Summierte Dauer  $\gamma_i$  des Aufenthalts in Zustand  $i$ :

$$\gamma_1 = 79.8 \quad \gamma_2 = 382.5 \quad \gamma_3 = 88.6$$

- Anzahl der Wechsel von Zustand  $i$  (Zeile) zu Zustand  $j$  (Spalte):  $\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 8 & 29 \\ 5 & 37 \end{pmatrix}$

- Bestimmen Sie die gemeinsame Likelihood für die Parameter der Übergangsmatrix  $\mathbf{Q}$  und die der Intensitätsmatrix  $\mathbf{\Lambda}$  unter der Annahme, dass der gegebene Pfad vollständig ist.
- Bestimmen Sie ML-Schätzer für alle Parameter in  $\mathbf{Q}$  und  $\mathbf{\Lambda}$ .
- Schätzen Sie außerdem die stationäre Verteilung des diskreten Markov-Prozesses und interpretieren Sie diese.