Institut für Statistik
Ludwig-Maximilians-Universität
Ludwigstr. 33
80539 München

Skript zur Vorlesung

STOCHASTISCHE PROZESSE

Ludwig Fahrmeir, Günter Raßer, Thomas Kneib

Dieses Skript beruht zu einem großen Teil auf Auszügen aus Fahrmeir, Kaufmann & Ost (1981). Ergänzungen betreffen Teile der Kapitel 2 und 3, sowie die Kapitel 6 und 7.

Unser Dank gilt Rudi Eichholz, der den größten Teil des LaTeX-Skripts erstellte.

Überarbeitete Version vom 13. April 2015

Inhaltsverzeichnis

Literatur

AMMANN, M. (2001). *Credit Risk Valuation* (2nd ed.). Springer.

ANDERSEN, P.K., BORGAN, O. (1985). Counting process models for life history data: A review (with discussion). *Scand. J. Statist.* **12**, 97–158.

ANDERSEN, P.K., BORGAN, O., GILL, R., KEIDING, N. (1993). *Statistical Models Based on Counting Processes.* Springer.

BAUER, H. (2001). *Wahrscheinlichkeitstheorie* (5. Aufl.). De Gruyter.

BHATTACHARYA, R., WAYMIRE, E. (1990). *Stochastic Processes with applications.* Wiley.

BILLINGSLEY, P. (1995). *Probability and measure* (3rd ed.). Wiley.

BINGHAM, N.H., KIESEL, R. (2004). *Risk-Neutral Valuation* (2nd ed.). Springer.

BRÉMAUD, P. (1981). *Point Processes and Queues: Martingale Dynamics.* Springer.

FAHRMEIR, L., KAUFMANN, H., OST, F. (1981). *Stochastische Prozesse.* Hanser.

FLEMING, T.R., HARRINGTON, D.P. (1991). *Counting Processes and Survival Analysis.* Wiley.

FRANKE, J., HÄRDLE, W., HAFNER, C. (2001). *Einführung in die Statistik der Finanzmärkte.* Springer.

GÄNSSLER, P., STUTE, W. (1977). *Wahrscheinlichkeitstheorie.* Springer.

GUTTORP, P. (1995). *Stochastic Modelling of Scientific Data.* Chapman & Hall.

GRIMMETT, G., STIRZAKER, D. (2001). *Probability and Random Processes.* Oxford University Press.

JACOD, J. (1979). *Calcul stochastique et problèmes de martingales.* Lectures Notes in Mathematics 714. Springer.

KARLIN, S., TAYLOR, H.M. (1975). *A first course in stochastic processes* (2nd ed.). Academic Press.

KOLLER, M. (2000). *Stochastische Modelle in der Lebensversicherung.* Springer.

KORN, R., KORN, E. (1999). *Optionsbewertung und Portfolio-Optimierung.* Vieweg.

LAWLER, G.F. (2006). *Introduction to Stochastic Processes* (2nd ed.). Chapman & Hall.

LIPTSER, R.S., SHIRYAYEV, A.N. (1989). *Theory of Martingales.* Kluwer.

ØKSENDAL, B. (2000). *Stochastic Differential Equations* (5th ed.). Springer.

PRUSCHA, H. (2000). *Statistik stochstischer Prozesse.* Vorlesung, LMU.

ROSS, S.M. (2007). *Introduction to Probability Models* (9th ed.). Academic Press.

TAYLOR, H.E., KARLIN, S. (1998). *An Introduction to Stochastic Modelling* (2nd ed.). Academic Press.

TODOROVIC, P. (1992). *Introduction to Stochastic Processes and their applications.* Springer.

Kapitel 1

Einführung und Beispiele

Inhalt:

- Anwendungsbeispiele
- erste Definition eines stochastischen Prozesses
- einige spezielle stochastische Prozesse

Ziel:

- Aufzeigen der Vielfalt stochastischer Prozesse
- Einführung erster Grundbegriffe anhand von Beispielen

1.1 Einführende Beispiele und erste Definition

Beispiele:

- rein zeitlich:
  - Mikrodaten des IFO-Konjunkturtests
  - Markenwahl
  - Erwerbstätigkeit: Individuelle Verläufe, Anzahl Erwerbsloser
  - Krankheiten : Individuelle Verläufe, Anzahl Erkrankter
  - DNA-Sequenzen
  - Genetische Evolution
  - (Aktien)Kurse: Tagesdaten

- (Aktien)Kurse: Inter-Tagesdaten
- Schlafzustände
- Schadensfälle und Schadenshöhen bei KFZ-Versicherung
- Brown'sche Bewegung (ein- und mehrdimensional)

• räumlich + räumlich-zeitlich:

- Krebsatlas (räumlich, räumlich-zeitlich)
- Erwerbstätigkeit (räumlich, räumlich-zeitlich)
- fMRI Daten (human brain mapping)
- Kosten bei privater Krankenversicherung (räumlich-zeitlich)

In allen Beispielen beobachtet bzw. misst man Realisierungen von ZV X_t, $t \in T$, mit einer geeigneten Indexmenge T, z.B. mit

$$\begin{array}{ll} T \subset \mathbb{N}_0,\ \mathbb{R}_+ & \text{(Zeit)}, \\ T \subset \mathbb{Z}^2 & \text{(räumliches Gitter)}, \\ T \subset \mathbb{R}^2 & \text{(kontinuierliche Teilmenge)}, \\ T \subset \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{N}_0 & \text{(Raum-Zeit)}. \end{array}$$

Dies führt zur ersten

Definition 1.1 Stochastischer Prozess (SP) als Familie von ZV

Sei T Indexmenge bzw. *Parameterraum*. Die Familie $\{X_t,\ t \in T\}$ von ZVen heißt stochastischer Prozess. Der Wertebereich S der ZVen heißt *Zustandsraum*.

Bemerkung:
Genauer gilt $X_t : (\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow (S, \mathcal{S})$ ZV für alle t, $\mathcal{S}$ ist σ-Algebra und $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein W-Raum. Dabei ist in der Regel $S \subset \mathbb{Z},\ \mathbb{R},\ \mathbb{R}^2, \ldots$ und für die σ-Algebra $\mathcal{S}$ gilt $\mathcal{S} = \mathcal{P}(S)$ für S diskret bzw. $\mathcal{S} = \mathcal{B}$ Borelmengen für $S \in \mathbb{R}_+,\ \mathbb{R}, \ldots$
Dann heißt das Quadrupel $X = \{\Omega, \mathcal{F}, P, (X_t,\ t \in T)\}$ stochastischer Prozess.

1.2 Spezielle stochastische Prozesse

1.2.1 Irrfahrten (Random walks)

Irrfahrten („Random Walks"): einfache stochastische Modelle für Spielsituationen; diskretisierte Idealisierung von Kursverläufen bzw. der Brown'schen Bewegung.

Diskrete einfache Irrfahrt auf der Geraden

Start in 0 (Zeit $t = 0$)
Bewegung: ($t = 1, 2, \ldots$)

Ein Schritt nach rechts mit Wahrscheinlichkeit p
Ein Schritt nach links mit Wahrscheinlichkeit q
Verbleiben im Zustand mit Wahrscheinlichkeit r

$p + q + r = 1$
$\{Z_t,\, t = 1, 2, \ldots\}$ i.i.d. Folge
$Z_t \in \{-1, 0, 1\}$ ZV für t-ten Schritt
$P(Z_t = -1) = q,\; P(Z_t = 0) = r,\; P(Z_t = 1) = p$

X_t, $t = 0, 1, 2, \ldots$ Position nach dem t-ten Schritt
$X_0 = 0$, $X_t = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_t$, bzw. $X_t = X_{t-1} + Z_t$, $t \geq 1$

Definition 1.2 Einfache Irrfahrt

Die Folge $X = \{X_t,\; t \in \mathbb{N}_0\}$, mit $X_t = X_{t-1} + Z_t$, heißt (einfache) Irrfahrt auf der Geraden. (Z_t i.i.d. mit $P(Z_t = 1) = p$, $P(Z_t = -1) = q$, $P(Z_t = 0) = r$)

Also: $\{X_t,\ t \in \mathbb{N}_0\}$ ist ein stochastischer Prozess mit $T = \mathbb{N}_0$, $S = \mathbb{Z}$.
Zugrundeliegender Ergebnisraum Ω, Ergebnisse ω:
ω Folge der Realisierungen von $Z_1, Z_2, \ldots$
z.B. $\omega = (1, 1, -1, 1, 1, 0, 0, 1, -1, \ldots) = (Z_1(\omega) = 1, Z_2(\omega) = 1, Z_3(\omega) = -1, \ldots)$
$\Omega = \{-1, 0, 1\}^{\mathbb{N}}$

Pfad, Trajektorie, Realisierung: Treppenfunktion bzw. Polygon.

- Spezialfälle:

$$\begin{array}{rcll} r & = & 0 & \text{kein Unentschieden} \\ p = q & = & \frac{1}{2} & \text{faires Spiel, symmetrische Irrfahrt} \end{array}$$

- Modifikation: Absorbierende Schranken

Interpretation: Spieler A mit Anfangskapital a
Spieler B mit Anfangskapital b

X_t Gewinn von A nach t Spielen
$\{X_t = -a\}$ Ruin von A („Gambler's ruin“)
$\{X_t = b\}$ Ruin von B.

Ziel: z.B. Berechnung von Ruinwahrscheinlichkeiten bzw. Gewinnwahrscheinlichkeiten.

Ohne Beweis:

Gewinnwahrscheinlichkeit bei $p = q = \frac{1}{2}$ ist

$$\text{für } A: \quad P_A = \frac{a}{a+b} \quad \text{ und für } B: \quad P_B = \frac{b}{a+b}$$

- Markov-Eigenschaft der diskreten Irrfahrt:

$$P(X_{t+1} = j \mid X_t = i, X_{t-1} = i_{t-1}, X_{t-2} = i_{t-2}, \ldots, X_1 = i_1) = P(X_{t+1} = j \mid X_t = i),$$
$$\text{für } j \in \{i+1, i, i-1\}$$

Interpretation: Die Zukunft X_{t+1} ist bei bekannter Gegenwart X_t (bedingt) unabhängig von der Vergangenheit $X_{t-1}, \ldots, X_1$ ($X_0 = 0$!) bzw. $X_{t-1}, \ldots, X_1, X_0$; X_0 unabhängig von $\{Z_t\}$.

Beweis:

$$
\begin{aligned}
&P(X_{t+1} = j \mid X_t = i, X_{t-1} = i_{t-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) \\
&\quad = P(Z_{t+1} = j - i \mid Z_t = i - i_{t-1}, \dots, Z_1 = i_1 - i_0, X_0 = i_0) \\
&\underset{(Z_{t+1}, Z_t, \dots, Z_1, X_0 \text{ unabhängig})}{=} P(Z_{t+1} = j - i) = P(X_{t+1} = j \mid X_t = i).
\end{aligned}
$$

□

Ungerichtete Form der Markov-Eigenschaft:

$$P(X_t = i \mid X_{s \neq t}) = P(X_t = i \mid X_{t+1} = i_{t+1}, X_{t-1} = i_{t-1})$$

Interpretation: Bei gegebenen Nachbarn X_{t+1}, X_{t-1} ist X_t von weiteren Nachbarn links und rechts unabhängig.

Beweis:

□

- Zwei-dimensionale symmetrische Irrfahrt

$$
\begin{aligned}
X_n &= (X_{1n}, X_{2n}) \in \mathbb{Z}^2 \\
X_{n+1} &= X_n + Z_n \ ; \\
Z_n &\in \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}
$$

mit

$$P\left(Z_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \ldots = P\left(Z_n = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{4}$$

Verallgemeinerungen

- Allgemeine Irrfahrt (Random Walk)
  Bisher: $\{Z_t,\ t \in \mathbb{N}\}$ iid Folge mit $Z_t \in \{-1, 0, 1\}$.
  Allgemein: $\{Z_t,\ t \in \mathbb{N}\}$ iid Folge, Z_t beliebig verteilt.
  Beispiel: $\{Z_t,\ t \in \mathbb{N}\}$ iid $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$, „Gauß'sches Weißes Rauschen",
  $X_t = X_{t-1} + Z_t$ Gauß-Irrfahrt.
  Markov-Eigenschaft gilt analog:

$$\begin{aligned} f(x_t \mid X_{t-1} = x_{t-1}, \ldots, X_1 = x_1) = f(x_t \mid X_{t-1} = x_{t-1}) &\sim \mathrm{N}(x_{t-1}, \sigma^2) \\ \text{bzw.}\quad X_t \mid X_{t-1}, \ldots, X_1 \sim X_t \mid X_{t-1} &\sim \mathrm{N}(X_{t-1}, \sigma^2) \end{aligned}$$

- Autoregressive Prozesse

  Autoregressiver Prozess der Ordnung 1 ($AR(1)$)

$$X_t = \rho X_{t-1} + Z_t, \quad Z_t \text{ iid } N(0, \sigma^2)$$

  Autoregressiver Prozess der Ordnung p ($AR(p)$)

$$X_t = \rho_1 X_{t-1} + \ldots + \rho_p X_{t-p} + Z_t$$

  Gauß-Prozess, falls Z_t iid $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$.

  Markov-Eigenschaft

$$\begin{aligned} X_t \mid X_{t-1}, \ldots, X_1 \sim X_t | X_{t-1} &\sim \mathrm{N}(\rho X_{t-1}, \sigma^2) \quad \text{für } AR(1) \\ X_t \mid X_{t-1}, \ldots, X_1 \sim X_t \mid X_{t-1}, \ldots, X_{t-p} &\sim \mathrm{N}(\mu_t, \sigma^2) \qquad \text{für } AR(p) \\ \text{mit } \mu_t = \rho_1 X_{t-1} + \ldots + \rho_p X_{t-p}. & \end{aligned}$$

  Autoregressive Prozesse sind wichtiger Baustein in der Zeitreihenanalyse.

- Räumlicher Markov-Prozess

  Baustein für Bildanalyse, geographische Epidemiologie, etc.

  $\{X_s,\ s = (i, j) \in \mathbb{Z}^2\}$ heißt räumlicher (Gitter-)Prozess oder Zufallsfeld.

Beispiele:

- $X_{ij} \in \{0, 1\}$ Indikatorvariablen, z.B.

  $X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{archäologischer Fund in } (i, j) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

- $X_s \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ Zählvariable, z.B. Anzahl von Krebserkrankungen in bestimmter Periode in Landkreisen; dabei ist das Gitter irregulär.

- X_{ij} stetig verteilt, z.B. Graustufe/Farbe in der Bildanalyse

  Räumliche Markov-Eigenschaft

  $$f(X_{ij} \mid X_{kl},\ (k, l) \neq (i, j)) = f(X_{ij} \mid X_{kl},\ (k, l) \sim (i, j))$$

  $\sim$: „Nachbar von“

1.2.2 Wiener-Prozess

Historisch: Der Wiener-Prozess ist stochastisches Modell für die Brown'sche Bewegung, d.h. die (zeitsstetige) Irrfahrt kleiner Teilchen in homogener ruhender Flüssigkeit. Irrfahrt kommt durch zufälliges Zusammenstoßen mit Molekülen der Flüssigkeit zustande.
Moderne Herleitung: N. Wiener, 1923.

Parameterraum $T = \mathbb{R}_+$, Zustandsraum $S = \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$).

Bezeichnung: $W = \{W_t,\ t \in \mathbb{R}_+\}$ oder $\{W(t),\ t \in \mathbb{R}_+\}$,
($W(t)$ um die „Funktion“ von t zu betonen)

Der Wiener-Prozess ist wichtiger Baustein zur Modellierung von Wertpapierpreisen mit Anwendung in der Optionsbewertung (Black-Scholes-Regel), vgl. z.B. Korn/Korn (1999):
Sei $P_0(0)$, $P_0(t)$ der Preis eines risikolosen Wertpapiers (z.B. Sparguthaben) zu den Zeitpunkten 0 und t. Bei stetiger Verzinsung mit konstantem Zinssatz r gilt

$$\begin{aligned} P_0(t) &= P_0(0)e^{rt} \qquad \text{bzw.} \\ \ln P_0(t) &= \ln P_0(0) + rt \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ loglinearer Ansatz für Aktienkurse:

$$\ln P(t) = \ln P(0) + rt + W(t),$$

$W(t)$: regelloser Fehler in stetiger Zeit $\sim \mathrm{N}(0, \sigma^2 t)$.

Der Wiener-Prozess als Grenzfall von Irrfahrten

$X(t)$ symmetrische diskrete Irrfahrt mit Bewegungen zu den Zeitpunkten $n\triangle t$, $n = 1, 2, \dots$ um $\pm\triangle x$ nach oben bzw. unten, jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$.

$X(t) =$ Lage des Teilchens für $t = n\triangle t$, $X(0) = 0$ Start.

$$\Longrightarrow X(t) = \sum_{k=1}^{n} Z_k, \quad Z_k \text{ iid mit } \begin{cases} P(Z_k = +\triangle x) = \frac{1}{2} \\ P(Z_k = -\triangle x) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\mathrm{E}(Z_k) = 0$$

$$\mathrm{Var}(Z_k) = (\triangle x)^2$$

$$\Longrightarrow \mathrm{E}(X(t)) = 0,\ \mathrm{Var}(X(t)) = (\triangle x)^2 n = \underbrace{\frac{(\triangle x)^2}{\triangle t}}_{=:\sigma^2} t$$

Grenzübergang $n \to \infty$, so dass

$$\sigma^2 := \frac{(\triangle x)^2}{\triangle t}, \quad 0 < \sigma^2 < \infty$$

konstant bleibt: Zentraler Grenzwertsatz

$$\Longrightarrow \quad X(t) \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2 t) \quad \text{für } n \longrightarrow \infty.$$

Weiter gilt:
Die *Zuwächse* $X(t) - X(s)$, $X(v) - X(u)$, mit $u < v < s < t$ sind *unabhängig*, da sie sich aus getrennten iid Teilsummen der $\{Z_n\}$-Folge zusammensetzen.
Die *Zuwächse* $X(t+s) - X(s)$ sind *stationär*, d.h. die Verteilung hängt nur von der Zeitdifferenz ab

$$X(t+s) - X(s) \quad \sim \quad X(t) - X(0) \quad \sim \quad \mathrm{N}(0, \sigma^2 t)$$

Plausibel: Unabhängigkeit und Stationarität der Zuwächse überträgt sich auf Grenzprozess für $n \longrightarrow \infty$. Exakter Beweis schwierig.
Deshalb: Axiomatischer Zugang, obige Eigenschaften + *Stetigkeit der Pfade* (aus „physikalischen“ Gründen) werden *postuliert.*

Die „Herleitung“ des Wiener-Prozesses als Grenzfall von Irrfahrten funktioniert auch für allgemeine „symmetrische“ Irrfahrten, z.B. mit

$$Z_k \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2 \triangle t), \quad t = n\triangle t$$

$$\mathrm{Var}(X(t)) = n\sigma^2\triangle t = \frac{t\sigma^2\cancel{\triangle t}}{\cancel{\triangle t}} = \sigma^2 t$$

$$\Longrightarrow X(t) \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2 t) \quad \text{für } n \to \infty$$

Axiomatische Definition und Eigenschaften des Wiener-Prozesses

Definition 1.3 Wiener-Prozess *W*

Ein stochastischer Prozess $W = \{W(t), t \in \mathbb{R}_+\}$, $S = \mathbb{R}$, heißt Wiener-Prozess, wenn gilt:

(W1) *Zuwächse normalverteilt und stationär:*

$$W(s+t) - W(s) \quad \sim \quad \mathrm{N}(0, \sigma^2 t) \quad \text{für alle } s, t \geq 0$$

(W2) Für alle $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n,\ n \geq 3$ sind die *Zuwächse*

$$W(t_2) - W(t_1),\ \ldots,\ W(t_n) - W(t_{n-1})$$

unabhängig

(W3) $W(0) = 0$

(W4) Pfade sind stetig

Für $\sigma^2 = 1$ heißt der Wiener-Prozess normiert.

Bemerkungen:

(a) (W1), (W2) $\Rightarrow$ Wiener-Prozess ist Prozess mit stationären, unabhängigen und normalverteilten Zuwächsen.

(b) (W3) ist Anfangsbedingung. Addition von c liefert $\tilde{W}(t) = W(t) + c$ mit $\tilde{W}(0) = c$.

(c) (W1), (W2), (W3) bestimmen „endlich-dimensionale Verteilung“ von $W(t_1), W(t_2), \ldots, W(t_n) \quad \forall\ n \geq 1.\ t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_+$.
(W4) folgt *nicht* aus (W1), (W2), (W3). Im Gegenteil: Man müsste zeigen, dass (W4) mit (W1) – (W3) verträglich ist.

Eigenschaften des Wiener-Prozesses

(a) **Verteilungseigenschaften**

eindimensionale Verteilung:

$$W(t) \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2 t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+,$$

da $W(t) - \underbrace{W(0)}_{=0} \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2 t)$ nach (W1).

zweidimensionale Verteilungen:

$$\begin{pmatrix} W(s) \\ W(t) \end{pmatrix} \sim \mathrm{N}(0, \Sigma), \quad 0 \le s < t$$

mit

$$\Sigma = \sigma^2 \begin{pmatrix} s & s \\ s & t \end{pmatrix},$$

also $\quad \mathrm{Cov}(W(s), W(t)) = \sigma^2 s.\quad$ Für s, t beliebig: $\quad \mathrm{Cov}(W(s), W(t)) = \min(t, s)\sigma^2.$

Beweis:

$\underbrace{W(s)}_{=:U}, \underbrace{W(t) - W(s)}_{=:V}$, $0 \le s < t \quad$ o.B.d.A unabhängig und normalverteilt.(W1, W2)

$\Longrightarrow W(s) = U$, $W(t) = U + V$ bivariat normalverteilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(W(s), W(t)) &= \mathrm{E}(W(s) \cdot W(t)) \\
&= \mathrm{E}[\underbrace{(W(t) - W(s))}_{V} \underbrace{W(s)}_{U} + (\underbrace{W(s)}_{U})^2] \\
&= \mathrm{E}[\underbrace{(W(t) - W(s))}_{V} \underbrace{(W(s) - W(0))}_{U}] + \mathrm{E}(\underbrace{W(s)}_{U})^2 \\
&\overset{\text{unabhängige Zuwächse}}{=} \underbrace{\mathrm{E}[(W(t) - W(s))]}_{\mathrm{E}(V)=0} \underbrace{\mathrm{E}[(W(s) - W(0))]}_{\mathrm{E}(U)=0} + \underbrace{\mathrm{Var}(W(s))}_{\sigma^2 s}
\end{aligned}$$

□

Die bivariate Normalverteilungsdichte lässt sich schreiben als:

$$f_{s,t}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2 \sqrt{s(t-s)}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[\frac{x_1^2}{s} + \frac{(x_2 - x_1)^2}{t - s} \right] \right\}, \quad s < t$$

Beweis: *Übung*

Bedingte Dichten:

$$\begin{aligned}
W(s) \mid [W(t) = b] &\sim \mathrm{N}\left(\frac{s}{t} b, \sigma^2 \frac{s}{t}(t - s) \right), s < t \\
W(t) \mid [W(s) = a] &\sim \mathrm{N}(a, \sigma^2 (t - s))
\end{aligned}$$

Beweis: *Übung*

$W(s) \mid [W(t)=b]$	$W(t) \mid [W(s)=a]$
Linearität des bedingten Erwartungswertes	„Neustart zur Zeit s in a“

Endlichdimensionale Verteilungen:

$$
\begin{aligned}
&0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n,\ n \in \mathbb{N} \\
&(W(t_1), \ldots, W(t_n))' \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2 \Sigma), \\
&\Sigma = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & t_1 & \ldots & t_1 \\ t_1 & t_2 & t_2 & \ldots & t_2 \\ t_1 & t_2 & t_3 & \ldots & t_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_1 & t_2 & t_3 & \ldots & t_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Dichte:

$$
\begin{aligned}
f_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n) &= \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\frac{x_1^2}{t_1} + \frac{(x_2-x_1)^2}{t_2-t_1} + \ldots + \frac{(x_n-x_{n-1})^2}{t_n-t_{n-1}}\right]\right\}}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n \sqrt{t_1(t_2-t_1)\cdot \ldots \cdot (t_n-t_{n-1})}} \\
&\stackrel{!}{=} f_{t_1}(x_1) f_{t_2|t_1}(x_2 \mid x_1) \cdot \ldots \cdot f_{t_n|t_{n-1}}(x_n \mid x_{n-1})
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Dies zeigt die Markoveigenschaft von W, vgl. Kap. 8.

(b) **Pfade**

Die Pfade sind stetig, aber (m. Wkeit 1) nirgends differenzierbar und in jedem endlichen Intervall von unbeschränkter Variation

Beweis: *vgl. A2, Kap 6, FKO.*

(unbeschränkte Variation: $s = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$ Gitter auf $[s,t]$, Schrittweite $\delta_n = \frac{t-s}{n}$)
Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} |W(t_k) - W(t_{k-1})| \longrightarrow \infty\,, \quad \text{für} \quad n \longrightarrow \infty$$

Plausibilitätserklärung für Nicht-Differenzierbarkeit:
Für den Diff.Quotient gilt

$$\frac{W(t+h)-W(t)}{h} \sim \mathrm{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{\mid h \mid}\right)$$

d.h die Varianz des Diff.quot. $\longrightarrow \infty$ für $h \to 0$.

Es gilt sogar

$$P\left\{a \leq \frac{W(t+h)-W(t)}{h} \leq b\right\} \longrightarrow 0, \quad \text{[a,b] endl. Intervall}$$

$\Rightarrow$ Diff.quot. kann nicht gegen endliche ZV konvergieren.

Weitere Eigenschaften, z.B. Markoveigenschaft, in Kap. 8.

Fazit: Trotz der harmlos erscheinenden Verteilungseigenschaften ergeben sich extrem „unglatte“ Pfade.

1.2.3 Zählprozesse und Poisson-Prozess

Zählprozesse

- $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ SP von Ereigniszeitpunkten
  S_n Zeitpunkt des n-ten Ereignisses
  z.B.
  - ◇ Eintreten von Schadensfällen bei KFZ-Versicherung
  - ◇ Todesfälle in klinischer Studie
  - ◇ Ankünfte von Jobs bei Computer, von Kunden bei „Servicestelle“...
  - ◇ Kauf eines Produkts,
  - ◇ Transaktionen an Börse
- $\{T_n, n \in \mathbb{N}\}$ SP von Verweildauern, Zwischenankunftszeiten, etc. mit $T_n = S_n - S_{n-1}$
- Zählprozess
  $N(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} I_{(0,t]}(S_n) =$ Anzahl der Ereignisse in (0,t].
  (S_0 wird nicht gezählt)

Übereinkunft: $T_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. keine gleichzeitigen Ereignisse.
Pfade = Treppenfunktion mit Sprunghöhe 1, rechtsstetig
Es gilt:

$$\begin{aligned} S_n \leq t &\Leftrightarrow N(t) \geq n \\ S_n \leq t < S_{n+1} &\Leftrightarrow N(t) = n \\ N(t) = \max_n\{S_n \leq t\} &= \min_n\{S_{n+1} > t\} \end{aligned}$$

Mehr zu Zählprozessen in Kapitel 7; hier: Poisson-Prozess als einfachster Zählprozess

Erweiterung:
Markierter (oder „bewerteter“) Zählprozess
Zu jedem Ereigniszeitpunkt S_n wird eine zweite Variable Y_n beobachtet.
z.B. Y_n Schadenshöhe bei n-ten Schaden
Y_n Preis(-veränderung) bei n-ter Transaktion
Y_n Todesart

Der Poisson-Prozess

FKO, S. (80/81) ff.

Definition 1.4 Zählprozess N mit unabhängigen und stationären Zuwächsen

N besitzt *unabhängige Zuwächse* :$\Leftrightarrow$

$$\forall\, n\ \forall\, 0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n \quad \text{sind} \quad N(t_1) - N(t_0), \ldots, N(t_n) - N(t_{n-1}) \quad \text{unabhängig}$$

N besitzt *stationäre Zuwächse* :$\Leftrightarrow$

$$\forall\, 0 \leq t_1 < t_2,\ s > 0 \quad \text{sind} \quad N(t_2) - N(t_1) \text{ und } N(t_2 + s) - N(t_1 + s) \quad \text{identisch verteilt}$$

Definition 1.5 Poisson-Prozess

Der Zählprozess $N = \{N(t), t \geq 0\}$ heißt Poisson-Prozess $:\Leftrightarrow$

(1) N hat unabhängige und stationäre Zuwächse

(2) $P\{N(t+h) - N(t) \geq 2\} = o(h)$
$P\{N(t+h) - N(t) = 1\} = \lambda h + o(h)$

Definition 1.6 $o(h)$

$o(h)$ bezeichnet eine Funktion von h, die für $h \downarrow 0$ schneller gegen 0 geht als h, d.h.

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$$

Bemerkung: (2) $\Leftrightarrow$ Sprunghöhe der Pfade haben (ohne Beweis) (m. Wkeit 1) die Höhe 1
$\Leftrightarrow$ keine gleichzeitigen Ereignisse
$\Leftrightarrow$ Zählprozess nach unserer Übereinkunft
(ohne Beweis)

Satz 1.1 Poisson-Verteilung

Für Poisson-Prozess N gilt

$$\begin{aligned} P\{N(t) = n\} &= \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \\ \text{d.h.} \quad N(t) &\sim \mathrm{Po}(\lambda t), \end{aligned}$$

mit $\lambda \geq 0$ „Intensität“, „Rate“.

Bemerkung: (2) in Def. 1.5 kann durch $N(t) \sim \mathrm{Po}(\lambda t)$ ersetzt werden

Beweis:

Sei $p_0(t) := P(N(t) = 0)$, $p_n(t) := P(N(t) = n)$
Wir zeigen zunächst $p_0(t) = e^{-\lambda t}$. Es gilt wegen Definition 1.5,(1)

$$\begin{aligned} p_0(t+h) &= P\{N(t+h) = 0\} \\ &= P\{N(t) = 0, N(t+h) - N(t) = 0\} \\ &= P\{N(t) = 0\} \cdot P\{N(t+h) - N(t) = 0\} \\ &= p_0(t) p_0(h) \\ \frac{p_0(t+h) - p_0(t)}{h} &= p_0(t) \frac{p_0(h) - 1}{h} \end{aligned}$$

Beachtet man noch, dass aus Def 1.5,(2)

$$p_0(h) = 1 - \lambda h + o(h)$$

folgt, so erhält man für $h \to 0$

$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t),\ p_0(0) = 1.$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung für die unbekannte Funktion $p_0(t)$ und besitzt eine eindeutige Lösung. Einsetzen zeigt, dass $e^{-\lambda t}$ die Gleichung inklusive der Anfangsbedingung erfüllt.
Für $n > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
p_n(t+h) &= P\{N(t+h) = n\} \\
&= P\{N(t) = n, N(t+h) - N(t) = 0\} \\
&+ P\{N(t) = n-1, N(t+h) - N(t) = 1\} \\
&+ \underbrace{\sum_{k=2}^{n} P\{N(t) = n-k, N(t+h) - N(t) = k\}}_{o(h)\, wegen\, (2)} \\
&= p_n(t)p_0(h) + p_{n-1}(t)p_1(h) + o(h) \\
&= p_n(t)(1 - \lambda h) + p_{n-1}(t)\lambda h + o(h)
\end{aligned}$$

$h \to 0$ liefert

$$p_n'(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t), \quad n = 1, 2, \ldots$$

mit $p_0(t) = e^{-\lambda t}$, $p_n(0) = 0$.
Man verifiziert nun leicht, dass die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Poisson-Verteilung (eindeutige) Lösung dieser Differentialgleichung ist. □

Satz 1.2 N ist homogener Markov-Prozess

Für den Poisson-Prozess gilt mit $s_0 < \ldots < s_n < s < t$

$P(N(t) = j \mid N(s) = i, N(s_n) = i_n, \ldots, N(s_0) = i_0)$

$$\begin{aligned}
&= P(N(t) = j \mid N(s) = i) = P(N(t) - N(s) = j - i) \\
&= P(N(t-s) = j - i) \\
&= \frac{(\lambda(t-s))^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda(t-s)} \quad j \geq i
\end{aligned}$$

Beweis:

$P\{N(t) = j \mid N(s) = i, N(s_n) = i_n, \ldots, N(s_0) = i_0\}$

$$\begin{aligned}
&= P\{N(t) - N(s) = j - i \mid N(s) - N(s_n) = i - i_n, \ldots\} \\
&\overset{(1)}{=} P\{N(t) - N(s) = j - i\} \\
&= P\{N(t) - N(s) = j - i \mid N(s) - N(0) = i\} \\
&= P\{N(t) = j \mid N(s) = i\} \quad \text{(Markoveigenschaft)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{N(t)=j \mid N(s)=i\} &= P\{N(t)-N(s)=j-i\} \\ &\overset{(1)}{=} P\{N(t-s)-N(0)=j-i\} \quad \text{(Homogenität).} \end{aligned}$$

Aus Satz 1.1 folgt damit die Formel für die Übergangswahrscheinlichkeit

$$P(N(t)=j \mid N(s)=i)$$

. □

Bemerkung: Die erste Gleichung ist die *Markov-Eigenschaft* und besagt, dass bei Kenntnis des „gegenwärtigen“ Zustands $N(s)=i$ der „zukünftige“ Zustand $N(t)=j$ von der „Vergangenheit“ unabhängig ist. Wie der Beweis zeigt, wird für die Markov-Eigenschaft nur die Unabhängigkeit der Zuwächse benutzt. Also: Jeder Prozess mit unabhängigen Zuwächsen ist ein Markov-Prozess.

Satz 1.3

N ist Poisson-Prozess mit Rate $\lambda \Leftrightarrow$
Die Zwischenzeiten T_n sind iid Ex(λ) verteilt (exponentialverteilt mit Parameter λ).

Beweis:

Wir zeigen nur die „$\Rightarrow$“ Richtung. Es gilt

$$P\{T_1 > t\} = P\{N(t)=0\} = e^{-\lambda t},$$

d.h. T_1 ist exponentialverteilt mit Parameter λ.
Weiter gilt wegen der Unabhängigkeit und Stationarität der Zuwächse sowie Satz 1.2

$$\begin{aligned} P\{T_2 > t \mid T_1 = s\} &= P\{N(s+t)-N(s)=0 \mid N(s)=1\} \\ &= P\{N(s+t)-N(s)=0\} \\ &= e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

unabhängig von s. Die Regel der totalen Wahrscheinlichkeit liefert deshalb

$$P\{T_2 > t\} = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\lambda e^{-\lambda s} ds = e^{-\lambda t} = P\{T_2 > t \mid T_1 = s\},$$

also sind T_1 und T_2 unabhängig und exponentialverteilt. Die analoge Beweisführung für $n \geq 2$ liefert das allgemeine Ergebnis. □

Verallgemeinerung: **räumlicher Poisson-Prozess**

- Anzahl der Ereignisse in einem Gebiet A ist Poisson-verteilt mit E-Wert $\lambda \cdot \text{Fläche}(A)$.
- Anzahl der Ereignisse in zwei nicht überlappenden Gebieten A_1 und A_2 sind unabhängig.

Einige weitere Eigenschaften des Poisson-Prozesses

(FKO S. 85–90)

- $S_n = T_1 + \ldots + T_n$ Wartezeit auf n-tes Ereignis, $S_0 = 0$.
  Es gilt:

$$\begin{aligned} S_n &\sim \text{Ga}(n, \lambda) \\ f_{S_n}(t) &= \frac{e^{-\lambda t} \lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} \end{aligned}$$

mit $\quad \text{E}(S_n) = \frac{n}{\lambda}, \quad \text{Var}(S_n) = \frac{n}{\lambda^2}, \quad \text{Modus}(S_n) = \frac{n-1}{\lambda}.$

Beweis:

(Zur Gammaverteilung)

$$\{N(t) \geq n\} \Leftrightarrow \{S_n \leq t\}$$
$$\Rightarrow F_{s_n}(t) = \sum_{j=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}$$

Differentiation liefert die Dichte der Gamma-Verteilung. □

- Vorwärts-und Rückwärtsrekurrenzzeiten

$V(t) = S_{N(t)+1} - t \quad$ Vorwärtsrekurrenzzeit

$U(t) = t - S_{N(t)}$ Rückwärtsrekurrenzzeit
$U(t) + V(t) = T_{N(t)+1} = S_{N(t)+1} - S_{N(t)}$

Bemerkung: $N(t)$ in $S_{N(t)}$ ist *zufälliger* Index;
$T_{(N(t)+1)}, \neq T_n$, (n *fest*)

Es gilt:

$$P(V(t) \leq x) = F_{V(t)}(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

d.h. $V(t) \sim \mathrm{Ex}(\lambda)$

Bemerkung: $V(t) \sim \mathrm{Ex}(\lambda)$ *unabhängig von gewähltem t*
$\Leftrightarrow$ „Gedächtnislosigkeit" der Exponentialverteilung:

$$X \sim \mathrm{Ex}(\lambda) \Rightarrow P(X \leq t + x \mid X > t) = P(X \leq x)$$

- $\diamond$ $P(U(t) = t) = e^{-\lambda t}, \quad P(U(t) \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad 0 \leq x < t$
  (kein Ereignis vor t)
- $\diamond$ Sampling Paradoxon: t fest, $T_{N(t)+1} = V(t) + U(t)$

  $$\mathrm{E}(T_{N(t)+1}) = \mathrm{E}(U(t)) + \mathrm{E}(V(t)) = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t}) + \frac{1}{\lambda} > \frac{1}{\lambda} = \mathrm{E}(T_n)$$

  Plausibilitätserklärung: Bei fest vorgegebenem t ist $T_{N(t)+1}$ die zufällige Länge der enthaltenen Zwischenzeit. Im Schnitt werden längere Intervalle dabei favorisiert.

Überlagerung und Zerlegung von Poisson-Prozessen

$$\left.\begin{array}{ll} L = \{L(t), t \geq 0\} & \text{PP mit Rate } \lambda \\ M = \{M(t), t \geq 0\} & \text{PP mit Rate } \mu \end{array}\right\} \text{unabhängig}$$

- Dann heißt $N = \{N(t), t \geq 0\}$ mit

$$N(t, \omega) = L(t, \omega) + M(t, \omega)$$

Überlagerung

Es gilt: N ist PP mit Rate $\lambda + \mu$

- **Zerlegung**

  N PP mit Rate λ. Bei Eintritt eines Ereignisses wird ein binomisches Experiment $P(X=1)=p$, $P(X=0)=1-p$, unabhängig von N, durchgeführt.

$$\begin{aligned} X=1 &: \text{ Typ-1 Ereignis} \Rightarrow \text{Zählprozess } M \\ X=0 &: \text{ Typ-0 Ereignis} \Rightarrow \text{Zählprozess } L \end{aligned}$$

  Es gilt: M und L sind unabhängige PP mit Raten λp und $\lambda(1-p)$

Beispiel: Netzwerke, etwa Straßensystem

Verallgemeinerungen des Poisson-Prozesses

Die Unabhängigkeit und *insbesondere* Stationarität der Zuwächse ist in Anwendungen oft kritisch (bereits diskutiert für Schadensfälle bei Versicherungen)

Definition 1.7 Inhomogener Poisson-Prozess

Ein Zählprozess $N=\{N(t), t\geq 0\}$ heißt *nichtstationärer (inhomogener)* PP mit Rate (Intensitätsfunktion) $\lambda(t)$, $t\geq 0$ $\Leftrightarrow$

(1) N hat unabhängige Zuwächse

(2) $P(N(t+h)-N(t)\geq 2)=o(h)$

$P(N(t+h)-N(t)=1)=\lambda(t)h+o(h)$

Es lässt sich zeigen:

$$\begin{aligned} P(N(t+s)-N(t)=n) &= \exp\left(-\int_t^{t+s}\lambda(u)du\right)\frac{\left(\int_t^{t+s}\lambda(u)du\right)^n}{n!} \\ &= \exp(-(\Lambda(t+s)-\Lambda(t))\frac{(\Lambda(t+s)-\Lambda(t))^n}{n!} \end{aligned}$$

mit $\Lambda(t)=\int_0^t \lambda(u)du$ als „kumulierte“ Rate, d.h.

$$N(t+s)-N(t)\sim \mathrm{Po}\left(\int_t^{t+s}\lambda(u)du\right)$$

Definition 1.8 Bewerteter (Compound) Poisson-Prozess

N PP, $\{Y_n, n\in\mathbb{N}\}$ iid Folge, von N unabhängig.

$X=\{X(t), t\geq 0\}$ mit $X(t)=\sum_{n=1}^{N(t)} Y_n$ heißt bewerteter PP

Beispiele:

- N Schadensprozess
  $\{Y_n, n\in\mathbb{N}\}$ zugehörige Schadenshöhe
  $X(t)=\sum_{n=1}^{N(t)} Y_n$ Gesamtschaden in $[0,t]$
- Klassisches Versicherungsmodell von Cramér-Lundberg

Risikoprozess $R(t)=c_0+c_1t-X(t)$

c_1 = Prämienintensität
$X(t)$ = compound PP mit Intensität λ

Schadenhöhen Y_n iid. $\sim$ F

$N(t)$ klassischer P.P.

Ziel: $P(R(t) > 0 \forall t) =?$ bzw. $P(R(t) \leq 0) \leq ?$