Stationäre Verteilung einer MK mit 2 Zuständen $\{0,1\}$

$$P = \begin{bmatrix} 1-p_0 & p_0 \\ p_1 & 1-p_1 \end{bmatrix}$$

$$(\pi_0, \pi_1) \begin{bmatrix} 1-p_0 & p_0 \\ p_1 & 1-p_1 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} (\pi_0, \pi_1)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \qquad & \pi_0(1-p_0) + \pi_1 p_1 = \pi_0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\pi_0 p_0 = \pi_1 p_1} \\ & \pi_0 p_0 + \pi_1(1-p_1) = \pi_1, \quad \Leftrightarrow \quad \pi_0 p_0 = \pi_1 p_1 \end{aligned}$$

Lösung 1: $\tilde{\pi}_0, \tilde{\pi}_1$ unnormiert; keine Nebenbedingung

$$\widetilde{\pi}_0 = p_1 \Rightarrow \widetilde{\pi}_1 = p_0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\pi_0 = \frac{p_1}{p_0 + p_1}, \quad \pi_1 = \frac{p_0}{p_0 + p_1}}$$

Lösung 2: $\tilde{\pi}_0 + \tilde{\pi}_1 = 1$; Nebenbedingung

$$\pi_0 + \pi_1 = 1 \Leftrightarrow \pi_1 = 1 - \pi_0$$

$$\pi_0(1 - p_0) + (1 - \pi_0)p_1 = \pi_0$$

$$-\pi_0 p_0 + p_1 - \pi_0 p_1 = 0$$

$$\pi_0(p_0 + p_1) = p_1$$

$$\boxed{\pi_0 = \frac{p_1}{p_0 + p_1}, \quad \pi_1 = \frac{p_0}{p_0 + p_1}}$$

Fallstudie: Niederschlag bei den Snoqualmie-Wasserfällen

Daten: 36 Jahre $n = 1948, \ldots, 1983$; jeweils Januar $t = 1, \ldots, 31$.

$$X_{tn} = \begin{cases} 1 & \text{Regen am Tag } t \text{ in Jahr } n \\ 0 & \text{kein Regen am Tag } t \text{ im Jahr } n. \end{cases}$$

Annahme: Unabhängige Pfade $n = 1, \ldots, 36$ desselben Prozesses X werden beobachtet.

Modell 1: $\{X_{tn}\}$ sind i.i.d. B(1,p) verteilt.

relative Häufigkeiten für $X_t = 0 : \widehat{p} = \frac{325}{791+325} = 0.291$

relative Häufigkeiten für $X_t = 1 : 1 - \widehat{p} = 0.709$

Likelihood: $L(p) \propto p^{325}(1-p)^{791}$

Modell 2: X_t ist homogene Markov-Kette 1. Ordnung mit (jahres–unabhängiger) Übergangsmatrix P

Kontingenztafel:

	$X_t = 0$	$X_t = 1$	
$X_{t-1} = 0$	186	123	309
$X_{t-1} = 1$	128	643	771
	314	766	1080

Beachte: Hier gehen nur 30·36=1080 Beobachtungen ein.

Geschätzte Übergangsmatrix (z.B $\widehat{p}_{01} = \frac{123}{309} = 0.398$):

$$\widehat{P} = \begin{pmatrix} 0.602 & 0.398 \\ 0.166 & 0.834 \end{pmatrix}$$

Likelihood:

$$L(P) = \prod_{n=1}^{36} P(X_{0n} = x_{0n}) \cdot p_{00}^{186} p_{01}^{123} p_{10}^{128} p_{11}^{643}$$

LQ–Test zu

$\mathrm{H}_0 : \{X_t\}$ i.i.d versus $\mathrm{H}_1 : \{X_t\}$ MK 1. Ordnung

Beachte: unter H_0 und H_1 werden "gleiche" Daten benötigt.

$\Rightarrow$ Lasse bei Modell 1 die Startwerte $(n = 1, ..., 36)$ weg.

$\Rightarrow \widehat{p} = \frac{314}{766+314} = 0.291$

LQ–Statistik ($\overset{a}{\sim} \chi^2_1$ unter H_0):

$$\begin{aligned}
2\{\log(L(\widehat{P})) - \log(L(\widehat{p}))\} &= 2\{[186 \cdot \log(0.602) + 123 \cdot \log(0.398) \\
&\quad +128 \cdot \log(0.166) + 643 \cdot \log(0.834)] \\
&\quad -[314 \cdot \log(0.291) + 766 \cdot \log(0.709)]\} \\
&= 193.49
\end{aligned}$$

$\Rightarrow H_0$ (i.i.d. Modell 1) ablehnen

Modell 3: Homogene Markov-Kette 2. Ordnung

Kontingenztafel:

		$X_t = 0$	$X_t = 1$	
$X_{t-2} = 0$	$X_{t-1} = 0$	109	67	176
$X_{t-2} = 0$	$X_{t-1} = 1$	25	94	119
$X_{t-2} = 1$	$X_{t-1} = 0$	70	52	122
$X_{t-2} = 1$	$X_{t-1} = 1$	100	527	627
		304	740	1044

$\Rightarrow$ geschätzte ÜM für MK 2. Ordnung

$$\widehat{P}_2 = (\widehat{p}_{ij,k})_{ij;k} = \begin{pmatrix} 0.619 & 0.381 \\ 0.210 & 0.790 \\ 0.574 & 0.426 \\ 0.159 & 0.841 \end{pmatrix}$$

LQ–Test zu

H$_0$: $\{X_t\}$ MK 1. Ordnung versus H$_1$: $\{X_t\}$ MK 2. Ordnung

$$
\begin{aligned}
\log(L(\widehat{P}_2)) &= 109 \cdot \log(0.619) + ... + 527 \cdot \log(0.841) \\
&= -536.48 \\
\log(L(\widehat{P})) &= -537.67
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow 2\{\log(L(\widehat{P}_2)) - \log(L(\widehat{P}))\} = 2.37$ bei 2 Freiheitsgraden

$\Rightarrow$ p–Wert 0.15

$\Rightarrow$ H_0 wird nicht abgelehnt.