

Kapitel 4

Diskrete Markov-Prozesse

Bei Markov-Ketten ist $T = \mathbb{N}_0$, d.h. die Zeit wird als diskret betrachtet. Bei Markov-Prozessen läuft die Zeit kontinuierlich mit $T = \mathbb{R}_+$. Ist S diskret, wie in diesem Kapitel, sprechen wir von diskreten Markov-Prozessen.

Inhalt:

- Allgemeine Eigenschaften
- Poisson-Prozess, Geburts- und Todesprozesse
- Abriss der allgemeinen Theorie für reguläre Prozesse, insbesondere mit endlichem S .

4.1 Definition und elementare Eigenschaften

Beispiele

- Klinische Studien, Krankenverläufe
- Markenwahlprozess
- genetische Evolution
(Liò, P. & Goldmann, N.(1998) Models of Molecular Evolution and Phylogeny. Genome Research 8, 1233–1244).

Fragestellung: Gesucht sind stochastische Modelle für die molekulare Evolution, d.h. die durch Mutation verursachte Veränderung der Nukleotide A, T, C, G an bestimmten Positionen der DNA (oder analog für 20 Basen in Aminosäuren).

Vereinfachende Annahme: Die Evolution an verschiedenen Positionen verläuft unabhängig. Dann

genügt es, Modelle separat für die Positionen zu entwickeln.

Weitere Annahme: Homogenität und Stationarität. Verschiedene Modelle unterscheiden sich durch Annahme über die Raten λ_{ij} für Übergänge $i \rightarrow j$.

- Poisson-Prozess

Diskrete Markov-Prozesse sind einfache stochastische Modelle für zeitstetige stochastische Vorgänge. In Anwendungen können die Voraussetzungen zu restriktiv sein: \rightarrow Kapitel 5 und 7.

Definition 4.1 Diskreter Markov-Prozess

Ein SP $X = \{X(t), t \geq 0\}$ mit abzählbarem Zustandsraum heißt (*diskreter*) *Markov-Prozess* (MP) $:\Leftrightarrow \forall n \geq 0 \quad \forall t \geq s > s_n > \dots > s_0 \geq 0$ gilt

$$P\{X(t) = j \mid X(s) = i, X(s_n) = i_n, \dots, X(s_0) = i_0\} = P\{X(t) = j \mid X(s) = i\} \quad (4.1)$$

für beliebige $j, i, i_n, \dots, i_0 \in S$.

$$p_{ij}(s, t) := P\{X(t) = j \mid X(s) = i\}$$

heißt *Übergangswahrscheinlichkeit(-sfunktion)* (ÜW),

$$P(s, t) = (p_{ij}(s, t))$$

Übergangsmatrix (ÜM).

Der MP heißt *homogen* (oder besitzt *stationäre* ÜW) $:\Leftrightarrow$

$$P\{X(t+s) = j \mid X(s) = i\} = P\{X(t) = j \mid X(0) = i\} = p_{ij}(0, t) =: p_{ij}(t),$$

d.h. für die ÜW ist nur die Zeitdifferenz maßgeblich.

Vereinbarung:

Wie bei den MK wollen wir uns im folgenden meist auf homogene MP beschränken.

Bemerkung:

$p_{ij}(t)$ entspricht $p_{ij}^{(t)}$ (t -schrittige ÜW) bei MK.

Satz 4.1 Chapman-Kolmogorov-Gleichung

Für die ÜW gilt

$$\begin{aligned}
 p_{ij}(t) &\geq 0, & \sum_{j \in S} p_{ij}(t) &= 1 \\
 p_{ij}(s+t) &= \sum_{k \in S} p_{ik}(s)p_{kj}(t)
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

bzw.:

$$P(s+t) = P(s)P(t)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
 P\{X(s+t) = j \mid X(0) = i\} &= \sum_k P\{X(s+t) = j, X(s) = k \mid X(0) = i\} \\
 &= \sum_k P\{X(s) = k \mid X(0) = i\} \cdot P\{X(s+t) = j \mid X(s) = k, X(0) = i\} \\
 &= \sum_k P\{X(s) = k \mid X(0) = i\} \cdot P\{X(s+t) = j \mid X(s) = k\}
 \end{aligned}$$

Für homogene MP erhält man daraus (4.2). □**Satz 4.2 Gemeinsame Verteilung** $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n, \quad i_0, i_1, \dots, i_n \in S$ gilt

$$\begin{aligned}
 P\{X(t_n) = i_n, \dots, X(t_1) = i_1 \mid X(t_0) = i_0\} &= p_{i_0 i_1}(t_1 - t_0) \cdot \dots \cdot p_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1}) \\
 P\{X(t_n) = i_n, \dots, X(t_1) = i_1, X(t_0) = i_0\} &= \\
 &= P\{X(t_0) = i_0\} \cdot p_{i_0 i_1}(t_1 - t_0) \cdot \dots \cdot p_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1}).
 \end{aligned}$$

Beweis:Völlig analog zum zeitdiskreten Fall bei MK. □

Das bedeutet, dass die gemeinsame Verteilung von $X(t_0), \dots, X(t_n)$ nach Vorgabe einer Anfangsverteilung bestimmt werden kann. Über den Satz von Kolmogorov lässt sich auch entsprechend wie für MK zeigen, dass durch Vorgabe einer Anfangsverteilung und von ÜW ein MP, der die vorgegebenen ÜW besitzt, konstruiert werden kann.

Für die statistische Inferenz ist Satz 4.2 wichtig, da er die Likelihoodfunktion bei gegebenen Daten i_1, \dots, i_n zu den Zeitpunkten t_1, \dots, t_n liefert.

In Anwendungen werden statt der ÜW oft sogenannte (*Übergangs-*)*Intensitäten* bzw. *Raten* zugrundegelegt oder aus Daten geschätzt. Für die Definition setzen wir voraus

$$p_{ij}(0) = \lim_{h \downarrow 0} p_{ij}(h) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

d.h. dass ein Übergang von i nach j ($i \neq j$) eine positive Zeitspanne beansprucht. Es lässt sich dann die Stetigkeit der $p_{ij}(t)$ für $t \geq 0$ und die Existenz der folgenden Grenzwerte bzw. Ableitungen zeigen.

Definition 4.2 (Übergangs-)Intensität, Rate

Für $i, j \in S$, $i \neq j$, heißt

$$\begin{aligned} \lambda_{ij} &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{p_{ij}(h)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{P(X(t+h) = j \mid X(t) = i)}{h} \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{P(X(t+h) = j \mid X(t) = i, \text{Vorgeschichte})}{h} = p'_{ij}(0) \end{aligned}$$

Übergangsintensität bzw. *Rate* von i nach j .

Für $i = j$ definieren wir

$$\lambda_{ii} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{p_{ii}(h) - p_{ii}(0)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{p_{ii}(h) - 1}{h}.$$

Zusammenfassend gilt für $i, j \in S$

$$\lambda_{ij} = p'_{ij}(0) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{p_{ij}(h) - p_{ij}(0)}{h}.$$

Dabei gilt $0 \leq \lambda_{ij} < \infty$ für $i \neq j$, aber $\lambda_{ii} \leq 0$.

$\Lambda = (\lambda_{ij})$ heißt *Intensitätsmatrix*.

In $o(h)$ -Schreibweise gilt also für $i \neq j$

$$p_{ij}(h) = P(X(t+h) = j \mid X(t) = i) = \lambda_{ij}h + o(h),$$

und

$$p_{ii}(h) = 1 + \lambda_{ii}h + o(h).$$

Beispiel: Poisson-Prozess

Für den PP $\{N(t), t \geq 0\}$ gilt

$$P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$$

$$P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda h + o(h)$$

$$\Rightarrow \quad p_{i,i+1}(h) = \lambda h + o(h), \text{ also } \lambda_{i,i+1} = \lambda$$

$$p_{ij}(h) = \begin{cases} 0, & 0 \leq j \leq i-1 \\ o(h), & j \geq i+2 \end{cases}$$

also $\lambda_{ij} = 0$ für $j \leq i-1$ und $j \geq i+2$, $p_{ii}(h) = 1 - \lambda h + o(h)$, also $\lambda_{ii} = -\lambda$.

Damit erhält man die Intensitätsmatrix

also eine Bandmatrix mit Zeilensumme = 0.

Die Definition 4.2 und das Beispiel zeigen, wie aus ÜW die Intensitäten erhalten werden können. Die schwierigere Fragestellung, wie aus Λ die ÜM $P(t)$ zu berechnen sind, wird in den folgenden Abschnitten behandelt.

4.2 Geburts- und Todesprozesse

4.2.1 Geburtsprozesse

Pfad: Treppenfunktion wie beim Poisson-Prozess

Aber: Intensität $\lambda \rightarrow$ zustandsabhängige Intensität λ_i

Definition 4.3 Geburtsprozess

Ein SP $X = \{X(t), t \geq 0\}$ mit Zustandsraum $S \subset \mathbb{N}_0$ heißt *Geburtsprozess* $\Leftrightarrow X$ ist ein homogener, diskreter MP mit

$$\begin{aligned} p_{i,i+1}(h) &= \lambda_i h + o(h), \\ p_{i,i}(h) &= 1 - \lambda_i h + o(h), \quad \lambda_i \geq 0, \quad i \geq i_0 \\ p_{i,j}(h) &= \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq j \leq i - 1 \\ o(h) & , \quad j \geq i + 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Damit sind analog zum Poisson-Prozess die Intensitäten bestimmt durch

$$\lambda_{i,i+1} = \lambda_i, \quad \lambda_{ii} = -\lambda_i$$

und $\lambda_{ij} = 0$ sonst. Damit hat auch Λ die gleiche Bandstruktur; es ist nur λ durch λ_i zu ersetzen.

Aus der Definition 4.3, d.h. aus den Intensitäten, lassen sich mit Hilfe der Chapman-Kolmogorov-Gleichungen ÜW (mit $i_0 = 0$)

$$p_{0n}(t) = P(X(t) = n \mid X(0) = 0)$$

herleiten:

$$\begin{aligned} p_{0n}(t+h) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_{0k}(t)p_{kn}(h) \\ &= p_{0n}(t)(1 - \lambda_n h + o(h)) + p_{0,n-1}(t)(\lambda_{n-1} h + o(h)) + \sum_{k=0}^{n-2} p_{0k}(t)p_{kn}(h) \\ &= p_{0n}(t)(1 - \lambda_n h) + p_{0,n-1}(t)\lambda_{n-1} h + o(h) \quad \text{für } n \geq 1, \end{aligned}$$

bzw.

$$p_{00}(t+h) = p_{00}(t)(1 - \lambda_0 h) + o(h) \quad \text{für } n = 0.$$

Grenzübergang $h \downarrow 0$ ergibt

$$\begin{aligned} p'_{00}(t) &= -\lambda_0 p_{00}(t) \\ p'_{0n}(t) &= -\lambda_n p_{0n}(t) + \lambda_{n-1} p_{0,n-1}(t), \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen

$$p_{00}(0) = 1, \quad p_{0n}(0) = 0 \quad \text{für } n > 0,$$

lässt sich das DGL-System lösen mit

$$p_{0n}(t) = \sum_{i=0}^n A_n^{(i)} e^{-\lambda_i t}, \quad n \geq 0,$$

falls $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$ gilt. Dabei ist

$$A_n^{(i)} = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{(\lambda_0 - \lambda_i) \dots (\lambda_{i-1} - \lambda_i) (\lambda_{i+1} - \lambda_i) \dots (\lambda_n - \lambda_i)}.$$

Man sieht, dass die Herleitung der ÜW aus den Intensitäten bereits in diesem einfachen Spezialfall eines MP aufwendig ist. Im allgemeinen existiert keine analytische Lösung, vgl. Abschnitt 4.3.

Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, d.h.

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{0n}(t) = 1 \quad \forall t \geq 0$$

ergibt sich genau dann (Feller), wenn

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} = \infty.$$

Das bedeutet, dass der Geburtsprozess nicht zu rasch anwachsen, nicht „explodieren“ darf. Beispielsweise ist für $\lambda_i = 2^i$ die Summe endlich, und $X(t)$ wächst mit positiver Wahrscheinlichkeit in endlicher Zeit über alle Grenzen.

Führen wir für dieses Verhalten den zusätzlichen Zustand ∞ ein, so lässt sich dieses Phänomen auch mit dem folgenden Satz plausibel machen.

Satz 4.3 Exponentialverteilte Verweildauern

Die Verweildauern T_i , $i \in \mathbb{N}$, sind unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter λ_i , d.h.

$$T_i \sim \text{Ex}(\lambda_i).$$

Beweis: *Spezialfall eines allgemeinen Satzes in Abschnitt 4.3.*

Es gilt also $E(T_i) = \frac{1}{\lambda_i}$. Daher ist $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i}$ die erwartete Zeit bevor $\{X(t) = \infty\}$ eintritt. Falls die Summe divergiert scheint plausibel, dass dann $P\{X(t) = \infty\} = 0$ ist. Andernfalls ist $P\{X(t) = \infty\} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} p_{0n}(t)$.

Beispiel: Yule-Prozess (linearer Wachstumsprozess)

Eine Population bestehe aus einem Anfangsbestand von $X(0) = i_0$ Individuen. Diese vermehren sich unabhängig voneinander, wobei jedes Individuum im Zeitintervall h mit Wahrscheinlichkeit $\lambda h + o(h)$ ein weiteres Mitglied der Population erzeugt, die Wahrscheinlichkeit für die Erzeugung mehrerer

Individuen sei $o(h)$. Der binomische Lehrsatz liefert

$$p_{i,i+1}(h) = \binom{i}{1} (\lambda h + o(h))(1 - \lambda h + o(h))^{i-1} = i\lambda h + o(h) \quad \text{und}$$

$$p_{i,j}(h) = \binom{i}{j-i} (\lambda h + o(h))^{j-i} (1 - \lambda h + o(h))^{i-(j-i)} = o(h) \quad \text{für } j - i \geq 2.$$

Es handelt sich also um einen Geburtsprozess mit der Rate $\lambda_i = i\lambda$.

Man kann zeigen, dass $X(t) - i_0$ eine negative Binomialverteilung mit den Parametern i_0 und $\exp(-\lambda t)$ besitzt. Also gilt

$$E(X(t) - i_0) = \frac{i_0(1 - \exp(-\lambda t))}{\exp(-\lambda t)}, \quad \text{Var}(X(t) - i_0) = \frac{i_0(1 - \exp(-\lambda t))}{\exp(-2\lambda t)}$$

und damit ergibt sich ein „exponentielles Wachstum“:

$$E(X(t)) = i_0 \exp(\lambda t), \quad \text{Var}(X(t)) = i_0 \exp(\lambda t)(\exp(\lambda t) - 1).$$

4.2.2 Geburts- und Todesprozesse

Pfad: Treppenfunktion mit Sprunghöhe ± 1

Die Definition erfolgt wieder über die Intensitäten nach oben oder unten zu springen.

Definition 4.4 Geburts- und Todesprozess

Ein SP $X = \{X(t), t \geq 0\}$ mit Zustandsraum $S \subset \mathbb{N}_0$ heißt Geburts- und Todesprozess $:\Leftrightarrow X$ ist ein homogener, diskreter MP mit

$$\begin{aligned} p_{i,i+1}(h) &= \lambda_i h + o(h), & i \geq 0 \\ p_{i,i-1}(h) &= \mu_i h + o(h), & i \geq 1 \\ p_{ii}(h) &= 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h), & i \geq 0 \\ p_{ij}(h) &= o(h), & |i - j| \geq 2, \quad i, j \geq 0 \\ (p_{ij}(0) &= 0, j \neq i, p_{ii}(0) = 1) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 0, \\ \lambda_0 &\underset{(\text{=})}{>} 0 \quad (> 0 \text{ „reflektierend“}, = 0 \text{ „absorbierend“}), \\ \mu_i, \lambda_i &\geq 0 \quad \text{für } i \geq 1. \end{aligned}$$

Für die Intensitäten gilt also

$$\begin{aligned} \lambda_{i,i+1} &= \lambda_i, \\ \lambda_{i,i-1} &= \mu_i, \\ \lambda_{ij} &= 0 \text{ für } |i - j| \geq 2, \\ \lambda_{ii} &= -(\lambda_i + \mu_i) \end{aligned}$$

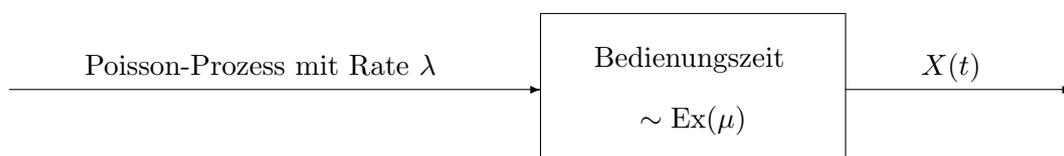
$$\Lambda = \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

ist tridiagonal.

Die explizite Berechnung der ÜM $P(t)$ aus Λ ist i.a. nicht möglich, vgl. FKO S. 96 ff.

Spezielle GT-Prozesse spielen eine Rolle in der Warteschlangen- und Bedienungstheorie (vgl. FKO S. 101 ff).

Das Wartesystem M/M/1/∞



$X(t)$: Anzahl der im System befindlichen Kunden

$X(t)$ ist spezieller GT-Prozess mit $\lambda_i = \lambda$ und $\mu_i = \mu$

Für $\lambda < \mu$ existiert Grenzverteilung p_j :

$$p_j = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = (1 - r)r^j, \quad r = \frac{\lambda}{\mu}$$

Also:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = X(\infty) &\sim \text{geometrisch verteilt} \\ \rightarrow \text{Erwartungswert} &= \frac{r}{1 - r}, \quad \text{Varianz} = \frac{r}{(1 - r)^2} \end{aligned}$$

Variante

- begrenzte Kapazität N des „Warteraums“

$$\rightarrow \lambda_i = \begin{cases} \lambda & , 0 \leq i < N \\ 0 & , i \geq N \end{cases}$$

- von der Länge der angetroffenen Warteschlange verursachte Entmutigung, z.B.

$$\lambda_i = \frac{\lambda}{(i + 1)}, \quad i = 0, 1, \dots$$

Das Wartesystem M/M/s/∞

Nun: s Schalter verfügbar; jeweils Rate μ

$X(t)$ GT-Prozess mit

$$\lambda_i = \lambda \quad \text{und} \quad \mu_i = \begin{cases} \mu i & , i = 1, \dots, s \\ \mu s & , i = s + 1, \dots \end{cases}$$

Grenzverteilung existiert für $\frac{\lambda}{s\mu} < 1$.

Bevölkerungsentwicklung

Verallgemeinerung des Yule-Prozesses, zum Zeitpunkt t : i Individuen

→ Geburtsrate $\lambda_i = i\lambda$,

→ Sterberate $\mu_i = i\mu$

Für $X(0) = 1$ kann man verschiedene Resultate zeigen, z.B.

$$E(X(t)) = \exp((\lambda - \mu)t) \quad (\text{für } \lambda \neq \mu)$$

oder

$$\text{Wahrscheinlichkeit des Aussterbens} = \begin{cases} 1 & , \lambda \leq \mu \\ \frac{\mu}{\lambda} & , \lambda > \mu \end{cases}$$

Abschließend gehen wir kurz ein auf

Struktur und Simulation der Pfade von Geburts- und Todesprozessen

Es ist $(\lambda_i + \mu_i)h + o(h)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass im Zeitraum $(t, t+h]$ der Zustand i verlassen wird. Gegenüber dem Poisson-Prozess tritt also $\lambda_i + \mu_i$ an die Stelle von λ und es lässt sich zeigen, dass die Verweildauer im Zustand i exponentialverteilt mit Erwartungswert $\frac{1}{(\lambda_i + \mu_i)}$ ist. Während des Zeitraums h findet eine Zustandsänderung $i \rightarrow i+1$ mit der Wahrscheinlichkeit $\lambda_i h + o(h)$, eine Änderung $i \rightarrow i-1$ mit der Wahrscheinlichkeit $\mu_i h + o(h)$ statt. Deshalb ist es plausibel, dass $\frac{\lambda_i}{(\lambda_i + \mu_i)}$ bzw. $\frac{\mu_i}{(\lambda_i + \mu_i)}$ die bedingte Wahrscheinlichkeit (unter der Bedingung, dass eine Änderung stattfindet) für einen Übergang $i \rightarrow i+1$ bzw. $i \rightarrow i-1$ ist.

Damit kann man sich die Entstehung der Pfade von Geburts- und Todesprozessen folgendermaßen veranschaulichen: Der momentane Zustand sei i . Es wird eine Realisation einer $(\lambda_i + \mu_i)$ -exponentialverteilten Zufallsvariablen erzeugt. Diese Realisierung ist die Verweildauer in i . Anschließend wird ein Bernoulli-Experiment durchgeführt mit $p_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}$, das entscheidet, ob (mit Wahrscheinlichkeit p_i) nach $i+1$ oder nach $i-1$ (mit Wahrscheinlichkeit $1-p_i$) gesprungen wird, usw.

4.3 Diskrete MP: Skizze der allgemeinen Theorie

Die Definition 4.1 lässt noch Pfade mit sehr irregulären Eigenschaften zu, z.B. Geburtsprozesse mit Explosion. Deshalb stellen wir Zusatzforderungen:

- $p_{ij}(0) = \lim_{h \downarrow 0} p_{ij}(h) = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$
- Pfade (m. Wkeit 1) rechtsseitig stetig

Bezeichnungen:

- S_n Zeitpunkt der n -ten Zustandsänderung, $S_0 = 0$,
- $Y_n = X(S_n)$ zum Zeitpunkt S_n angenommener Zustand,

- $T_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ Verweildauer in Y_n ,
- $S_{n+1} = S_n + T_{n+1}$.
- Falls „absorbierende“ Zustände Y_n möglich sind, d.h. $S_{n+1} = \infty$, definieren wir

$$Y_{n+1} = \begin{cases} Y_n & , S_{n+1} = \infty \\ X(S_{n+1}) & , S_{n+1} < \infty. \end{cases}$$

- $V(t)$ Dauer (vom Zeitpunkt t) bis zur nächsten Zustandsänderung, „Vorwärtsrekurrenzzeit“.

Für die Vorwärtsrekurrenzzeit gilt in Verallgemeinerung des entsprechenden Ergebnisses für den Poisson-Prozess:

Satz 4.4 Exponentialverteilte Dauern

Die Verweildauern T_n , $n \in \mathbb{N}$ sind exponentialverteilt mit Parameter λ_i , sodass gilt $T_n | Y_{n-1} = i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$. Für jeden Zeitpunkt t ist

$$P(V(t) \leq s | X(t) = i) = 1 - e^{-\lambda_i s} \quad , s \geq 0,$$

also ebenfalls exponentialverteilt mit Parameter λ_i .

Beweis:

(für $V(t)$)

Sei $f_i(s) := P(V(t) > s | X(t) = i)$. Wegen der Homogenität des MP ist $f_i(s)$ von t unabhängig und es gilt für alle $r, s \geq 0$

$$\begin{aligned} f_i(s+r) &= P(V(t) > s+r | X(t) = i) \\ &= P(V(t) > s, V(t+s) > r | X(t) = i) \\ &= P(V(t) > s | X(t) = i) \cdot P(V(t+s) > r | X(t) = i, V(t) > s) \\ &= P(V(t) > s | X(t) = i) \cdot P(V(t+s) > r | X(t+s) = i) \\ &= f_i(s) \cdot f_i(r). \end{aligned}$$

Wegen $0 \leq f_i(s) \leq 1$ muss $f_i(s) = e^{-\lambda_i s}$ mit $\lambda_i \geq 0$ sein. Für $\lambda_i = \infty$ ist $f_i(s) \equiv 0$. □

Definition 4.5 Zustände

Ein Zustand i heißt

$$\begin{aligned} \text{absorbierend} & :\Leftrightarrow \lambda_i = 0 \\ \text{stabil} & :\Leftrightarrow 0 < \lambda_i < \infty \\ \text{instabil} & :\Leftrightarrow \lambda_i = \infty \end{aligned}$$

Falls i absorbierend ist, gilt also für alle $s \geq 0$

$$P(V(t) > s \mid X(t) = i) = P(X(t+s) = i \mid X(t) = i) = 1,$$

der Zustand i wird also m. Wkeit 1 nicht mehr verlassen.

Falls i stabil ist, gilt

$$P(0 < V(t) < \infty \mid X(t) = i) = 1,$$

d.h. falls X zur Zeit t in i ist, verweilt X dort eine positive, aber *endliche* Zeit (m. Wkeit 1).

Falls i instabil ist, gilt

$$P(V(t) = 0 \mid X(t) = i) = 1,$$

d.h. der MP verlässt einen instabilen Zustand sofort wieder. Dass ein solches Verhalten zu irregulären Pfaden führt, erscheint plausibel. Man sieht leicht ein, dass insbesondere die Pfade nicht rechtsseitig stetig sein können. Da dies gegen unsere Vereinbarung verstößt, sind *instabile Zustände im weiteren ausgeschlossen*.

Durch den folgenden wichtigen Satz wird die Struktur von MP mit rechtsseitig stetigen Pfaden weitgehend aufgeklärt. Er zeigt, dass die nacheinander besuchten Zustände Y_n eine MK bilden und die Verweildauern exponentialverteilt sind.

Satz 4.5 Struktursatz

Sei X ein MP mit rechtsseitig stetigen Pfaden. Dann gilt

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \quad \forall j, i, \dots, i_0 \in S \quad \forall t, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R} \quad \forall 0 < s_1 \dots < s_n$$

$$1. \quad P(Y_{n+1} = j, T_{n+1} > t \mid Y_n = i, \dots, Y_0 = i_0, S_n = s_n, \dots, S_0 = 0) = q_{ij} e^{-\lambda_i t}$$

$$\text{mit } q_{ij} \geq 0, \sum_{j \in S} q_{ij} = 1, q_{ii} = \begin{cases} 0 & , i \text{ stabil} \\ 1 & , i \text{ absorbierend} \end{cases}$$

$$2. \quad \{Y_n, n \in \mathbb{N}\} \text{ ist eine MK mit der ÜM } Q = (q_{ij})$$

$$3. \quad P(T_{n+1} > t \mid Y_n = i, Y_{n+1} = j) = P(T_{n+1} > t \mid Y_n = i) = e^{-\lambda_i t}$$

$$4. \quad P(T_1 > t_1, \dots, T_n > t_n \mid Y_n = i, \dots, Y_0 = i_0) = e^{-\lambda_{i_0} t_1} \dots e^{-\lambda_{i_{n-1}} t_n}$$

Bemerkungen:

- (a) $\{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$ heißt „eingebettete“ MK, Erreichbarkeits-/Rekurrenzeigenschaften der eingebetteten MK übertragen sich auf diskreten MP.
- (b) Aussage 3 besagt, dass λ_i nur vom eben besuchten Zustand, nicht aber vom nächsten abhängt.
- (c) Aussage 4 besagt, dass die Verweildauern exponentialverteilt und bedingt unabhängig sind, falls die Folge der besuchten Zustände gegeben ist.
- (d) Der Struktursatz liefert auch die gemeinsame Verteilung von $\{T_n, Y_n\}$ und damit die Grundlage für die Likelihood zur ML-Schätzung der Strukturparameter λ_i und q_{ij} (bzw. der Intensitäten λ_{ij})

$$\begin{aligned}
 P(T_1 > t_1, \dots, T_n > t_n, Y_0 = i_0, Y_1 = i_1, \dots, Y_n = i_n) \\
 &= P(T_1 > t_1, \dots, T_n > t_n \mid Y_0 = i_0, Y_1 = i_1, \dots, Y_n = i_n) \\
 &\quad \cdot P(Y_0 = i_0, Y_1 = i_1, \dots, Y_n = i_n) \\
 &= e^{-\lambda_0 t_1} \dots e^{-\lambda_{i_{n-1}} t_n} \cdot P(Y_0 = i_0) \cdot q_{i_0 i_1} \dots q_{i_{n-1} i_n}
 \end{aligned}$$

Beweis:

Die linke Seite von 1 ist gleich

$$P\{X(S_n + T_{n+1}) = j, T_{n+1} > t \mid X(S_n) = i, \dots, X(0) = i_0, S_n = s_n, \dots, S_0 = 0\}.$$

Wegen der (starken) Markov-Eigenschaft und der Homogenität ist dies gleich

$$\begin{aligned}
 P\{X(T_1) = j, T_1 > t \mid X(0) = i\} \\
 &= P\{T_1 > t \mid X(0) = i\} \cdot P\{X(T_1) = j \mid X(0) = i, T_1 > t\} \\
 &\stackrel{\text{Satz 4.4}}{=} e^{-\lambda_i t} \cdot P\{X(T_1) = j \mid X(0) = i, T_1 > t\} \\
 &= e^{-\lambda_i t} \cdot P\{X(t + V(t)) = j \mid X(t) = i\} \\
 &= e^{-\lambda_i t} \cdot P\{Y_1 = j \mid Y_0 = i\} \\
 &= e^{-\lambda_i t} q_{ij}.
 \end{aligned}$$

Daraus folgt 1. Setzt man in 1 $t = 0$, so ergibt sich 2; 3 ergibt sich ebenfalls aus 1; 4 aus 3 durch Induktion. □

Satz 4.5 liefert folgende

Konstruktion bzw. Simulation der Pfade eines MP

Man gibt einen Startwert $X(\omega, 0) = Y_0(\omega) = i_0$ vor. Befindet man sich im Zustand $Y_n(\omega) = i_n, n \in \mathbb{N}_0$, so würfelt man gemäß der Verteilung $q_{i_n j}, j \in S$, den nächsten Zustand $Y_{n+1}(\omega) = i_{n+1}$. Die Verweil-

dauer $T_{n+1}(\omega) = t_{n+1}$ in i_n bis zum Sprung nach i_{n+1} wird gemäß einer λ_{i_n} -Exponentialverteilung realisiert.

Zu klären bleibt noch, in welcher Weise die ÜW $p_{ij}(t)$ die Strukturparameter q_{ij} , λ_i bestimmen und umgekehrt. Dies soll im folgenden geschehen.

Dazu wollen wir noch sicherstellen, dass sich die Sprungstellen S_n nicht im Endlichen häufen; dann können auch keine Explosionen in endlicher Zeit stattfinden. Deshalb fordern wir

$$\sup_n S_n = +\infty \quad \text{m. Wkeit 1}$$

$X(t)$ lässt sich dann durch die Y_n , S_n bzw. T_n festlegen:

$$X(t) = Y_n \quad \text{für } t \in [S_n, S_{n+1}).$$

Zusammenfassend kommen wir so zur

Definition 4.6 Regulärer MP

Ein diskreter (homogener) MP heißt *regulär* $:\Leftrightarrow$

1. $p_{ij}(0) = \lim_{h \downarrow 0} p_{ij}(h) = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$
2. Die Pfade sind (m. Wkeit 1) rechtsseitig stetig.
3. $\sup_n S_n = +\infty$ m. Wkeit 1

Vereinbarung: Im weiteren betrachten wir nur reguläre MP. Reguläre MP werden ausführlicher in *Cinlar*, Kap. 8 behandelt. Eine grundlegende Darstellung der Theorie nicht notwendig regulärer MP bietet *Chung*. Einige der folgenden Ergebnisse gelten auch für derartige allgemeinere Fälle.

Satz 4.6 Regularitätskriterien

Für einen MP X gelten 1 und 2 der Definition 4.6. Dann ist X regulär, falls eines der folgenden Kriterien zutrifft:

1. S endlich
2. $\lambda_i \leq c$ für alle $i \in S$
3. Alle Zustände der eingebetteten MK Y sind rekurrent.
4. Die MK Y verbleibt mit Wahrscheinlichkeit 0 in einer transienten Klasse.

Beweis: FKO S. 111

Der folgende Satz zeigt, wie sich aus vorgegebenen ÜW $p_{ij}(t)$ die Intensitäten λ_{ij} bestimmen lassen und wie sie mit den λ_i und q_{ij} zusammenhängen.

Satz 4.7 Intensitäten und Strukturparameter

X sei ein regulärer MP. Dann sind die ÜW $p_{ij}(t)$ stetig differenzierbar und es gilt

$$p'_{ij}(0) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{p_{ij}(h) - p_{ij}(0)}{h} = \lambda_{ij} = \begin{cases} -\lambda_i & , i = j \\ \lambda_i q_{ij} & , i \neq j, \end{cases}$$

bzw. in $o(h)$ -Schreibweise

$$\begin{aligned} P(X(t+h) = j \mid X(t) = i) &= h \underbrace{\lambda_i q_{ij}}_{\lambda_{ij}} + o(h), \quad i \neq j \quad \left(\Rightarrow q_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_i}, \text{ falls } \lambda_i > 0 \right) \\ P(X(t+h) = i \mid X(t) = i) &= 1 - \lambda_i h + o(h). \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise (S endlich):

$$P(h) = I + \Lambda h + o(h).$$

bzw.

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{P(h) - I}{h} = P'(0) = \Lambda$$

Beweis:

Wir zeigen nur die Hauptaussage, jedoch nicht, dass die ÜW stetig differenzierbar sind. Da die Verweildauern exponentialverteilt sind, ist die Wahrscheinlichkeit für mehr als einen Übergang im Zeitraum h gleich $o(h)$. Deshalb gilt

$$\begin{aligned} p_{ii}(h) = P\{V(t) > h \mid X(t) = i\} + o(h) &\stackrel{\text{Satz 4.4}}{=} e^{-\lambda_i h} + o(h) \\ &= 1 - \lambda_i h + o(h) \end{aligned}$$

also

$$\frac{p_{ii}(h) - p_{ii}(0)}{h} = -\lambda_i + \frac{o(h)}{h}.$$

Grenzübergang $h \rightarrow 0$ liefert $p'_{ii}(0) = \lambda_{ii} = -\lambda_i$.

Für $i \neq j$ gilt entsprechend

$$\begin{aligned} p_{ij}(h) &= P\{Y_{n+1} = j, T_{n+1} \leq h \mid Y_n = i\} + o(h) \\ &\stackrel{\text{Satz 4.5, 1}}{=} q_{ij} - q_{ij} e^{-\lambda_i h} + o(h) \\ &= q_{ij} \lambda_i h + o(h), \end{aligned}$$

$h \rightarrow 0$ liefert $p'_{ij}(0) = \lambda_{ij} = \lambda_i q_{ij}$ für $i \neq j$. □

Da

$$q_{ii} = \begin{cases} 0 & , i \text{ stabil } (0 < \lambda_i < \infty) \\ 1 & , i \text{ absorbierend } (\lambda_i = 0), \end{cases}$$

ergibt sich für reguläre MP die

Folgerung

Die Zeilensummen der Intensitätsmatrix Λ sind gleich 0, d.h. für alle $i \in S$ gilt

$$\lambda_{ii} = -\lambda_i = - \sum_{j \in S, j \neq i} \lambda_{ij}$$

Beispiel: Molekulare Evolution

$$S = \{A, T, G, C\}$$

Beispiel: Poisson-/Geburtsprozess

In Anwendungen sind meist λ_{ij} bzw. λ_i und q_{ij} vorgegeben oder aus Daten geschätzt, und die ÜW $p_{ij}(t)$ sind daraus zu berechnen. Prinzipiell, jedoch selten analytisch, lässt sich diese Aufgabe mit Hilfe des folgenden Satzes lösen.

Satz 4.8 $\Lambda \rightarrow P(t)$

Sei X ein regulärer MP. Dann ist die ÜM $P(t) = (p_{ij}(t))$ durch die ÜM Q der eingebetteten MK Y und die Erwartungswerte $\frac{1}{\lambda_i}$ der Verweildauern bzw. die Intensitätsmatrix Λ eindeutig bestimmt. Die ÜW $p_{ij}(t)$ sind Lösung von

$$1. \quad p'_{ij}(t) = \sum_{k \in S} \lambda_{ik} p_{kj}(t) \quad \text{bzw.} \quad P'(t) = \Lambda P(t), \quad P(0) = I$$

(Rückwärtsgleichungen von Kolmogorov)

$$2. \quad p'_{ij}(t) = \sum_{k \in S} p_{ik}(t) \lambda_{kj} \quad \text{bzw.} \quad P'(t) = P(t) \Lambda, \quad P(0) = I$$

(Vorwärtsgleichungen von Kolmogorov)

3. Für endliches S ist die Lösung gegeben durch

$$P(t) = e^{t\Lambda} = I + t\Lambda + \frac{(t\Lambda)^2}{2!} + \frac{(t\Lambda)^3}{3!} + \dots$$

Die (numerische) Berechnung erfolgt mit Hilfe der Spektralzerlegung von Λ

$$\Lambda = U \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_m) U^{-1},$$

mit den Eigenwerten d_1, \dots, d_m und der Matrix U der Eigenvektoren. Dann gilt

$$P(t) = U \operatorname{diag}(e^{d_1 t}, \dots, e^{d_m t}) U^{-1}.$$

Beweis:

Nur zu 1 bzw. 2; informell, in Matrixdarstellung (vgl. FKO S. 113). Die Beziehung zwischen $p'_{ij}(0)$ und λ_{ij} in Satz 4.7 lässt sich in Matrizenform durch

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{P(h) - I}{h} = \Lambda$$

darstellen. Dann folgt mit Hilfe der Chapman-Kolmogorov-Gleichungen (Satz 4.1)

$$\frac{P(t+h) - P(t)}{h} = \frac{P(t)P(h) - P(t)}{h} = \frac{P(t)(P(h) - I)}{h}$$

bzw.

$$\frac{P(t+h) - P(t)}{h} = \frac{(P(h) - I)P(t)}{h}.$$

Grenzübergang $h \rightarrow 0$ liefert

$$P'(t) = P(t)\Lambda \quad \text{bzw.} \quad P'(t) = \Lambda P(t)$$

mit $P(0) = I$.

Die Lösung in 3 ergibt sich aus der Theorie linearer Differentialgleichungssysteme. \square

Beispiel: MP mit 2 Zuständen

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Eigenwertzerlegung von Λ : EW sind 0 und -3 ; es ist

$$D = \text{diag}(d_1, d_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} P(t) &= U \text{diag}(e^{d_1 t}, e^{d_2 t}) U^{-1} \\ &= U \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} U^{-1} \\ &= \dots \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} + e^{-3t} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bemerkung: Es existiert der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Beispiel: Allgemeiner MP mit 2 Zuständen

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

Die Kolmogorov-Gleichung $P'(t) = P(t)\Lambda$ ergibt

$$\begin{pmatrix} p'_{00}(t) & p'_{01}(t) \\ p'_{10}(t) & p'_{11}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow p'_{00}(t) = -\lambda p_{00}(t) + \mu p_{01}(t), \quad p_{01}(t) = 1 - p_{00}(t),$$

$$\Rightarrow p'_{00}(t) = +\mu - (\lambda + \mu)p_{00}(t).$$

Lösung:

$$\begin{aligned} p_{00}(t) &= \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} \\ p_{01}(t) &= 1 - p_{00}(t) \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen

$$\begin{aligned} p_{11}(t) &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} \\ p_{10}(t) &= \frac{\mu}{\lambda + \mu} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} \end{aligned}$$

Grenzwert:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{\lambda + \mu} & \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \\ \frac{\mu}{\lambda + \mu} & \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \end{pmatrix}.$$

Grenzwertsätze

Die Klassifizierung der Zustände des MP X erfolgt durch die zugrundeliegende MK Y mit der ÜM Q . Mit den t -schrittigen ÜW $q_{ij}^{(t)}$ folgt zunächst für *transientes* j aus $\lim_{t \rightarrow \infty} q_{ij}^{(t)} = 0$ sofort

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = 0.$$

Deshalb beschränken wir uns wie bei MK auf irreduzible, rekurrente MP (d.h. die zugrundeliegende MK Y sei irreduzibel rekurrent).

Dann gilt

Satz 4.9 Grenzwertsatz

Der MP X sei regulär und irreduzibel positiv-rekurrent. Dann gilt:

1. $\lim_{t \rightarrow \infty} P(X(t) = j) = \pi_j$ existiert $\forall j \in S$,
und ist von der Anfangsverteilung unabhängig.

2. Die Grenzverteilung π lässt sich berechnen über

(a) $\pi_j = \frac{\eta_j}{\sum_i \eta_i}$ mit $\eta \Lambda = 0$ bzw. über

(b) $\pi_j = \frac{\nu_j / \lambda_j}{\sum_i \nu_i / \lambda_i}$ mit $\nu = \nu Q$.

$$3. \lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \begin{pmatrix} \pi \\ \vdots \\ \pi \\ \vdots \\ \pi \end{pmatrix}$$

4. $\pi = (\dots, \pi_j, \dots)$ ist strikt positiv.

5. π ist die einzige *stationäre* Verteilung von X , d.h. es gilt

$$\pi = \pi \cdot P(t) \quad \forall t \geq 0.$$

Bemerkungen:

1. $(\eta_j) = (\nu_j / \lambda_j)$ ist die *unnormierte* Grenzverteilung.
2. $(\nu_j) = \nu$ ist die Grenzverteilung der eingebetteten MK Y .

Plausibilitätsbeweis zu 2: (vgl. auch FKO S. 116)

Kolmogorov'sche Vorwärtsgleichung:

$$P'(t) = P(t) \cdot \Lambda$$

Annahme: $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$ existiert

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \begin{pmatrix} \text{---} \pi \text{---} \\ \text{---} \pi \text{---} \end{pmatrix}$$

Dann folgt offensichtlich

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P'(t) = 0$$

da

$$\frac{d}{dt} \pi_j = \frac{d}{dt} \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = 0$$

(π_j hängt ja nicht von t ab, da Grenzverteilung)

Insgesamt folgt

$$0 = \begin{pmatrix} - & - & - & \pi & - & - & - \\ - & - & - & \pi & - & - & - \end{pmatrix} \cdot \Lambda,$$

in jeder Zeile steht also $2(a) \pi \cdot \Lambda = 0$.

Die Äquivalenz zu 2(b) gilt wegen $\nu = \nu \cdot Q \Leftrightarrow \nu(Q - I) = 0$.

Erweiterung mit $\frac{1}{\lambda_i} \cdot \lambda_i$:

$$\underbrace{\left(\frac{\nu_1}{\lambda_1}, \frac{\nu_2}{\lambda_2}, \dots \right)}_{\mu} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 q_{12} & \cdots \\ \lambda_2 q_{21} & -\lambda_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}}_{\Lambda} = 0$$

2(b) ist *plausibel*: Grenzverteilung ist proportional zu

$$\underbrace{\left(\frac{1}{\lambda_j} \right)}_{\text{durchschnittliche Aufenthaltsdauer in } j} \cdot \underbrace{\nu_j}_{\text{Wahrscheinlichkeit sich in } j \text{ aufzuhalten}}$$

Beispiel: 2-Zustands-MP

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & -\lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$-\eta_1 \lambda_1 + \eta_2 \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow -\eta_1 \lambda_1 + (1 - \eta_1) \lambda_2 = 0$$

$$\eta_1 \lambda_1 - \eta_2 \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 - \eta_1 (\lambda_1 + \lambda_2) = 0$$

$$\Rightarrow \eta_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad \eta_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

oder alternativ über eingebettete MK Y (2(b)):

Y hat ÜM

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit stationärer Verteilung ($\nu = \nu Q$)

$$\nu = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \Rightarrow \text{Grenzverteilung } (\pi_1, \pi_2) \text{ ist proportional zu } \left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2} \right)$$

Normieren liefert

$$\begin{aligned} (\pi_1, \pi_2) &= \pi = \frac{1}{\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}} \left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2} \right) \\ &= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2} \right) = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right) \end{aligned}$$

Beispiel: Peter Prinzip

(Taylor/Karlin, S. 366)

Betrieb: 3 berufliche Kategorien

 T Trainee, J Junior-Pos., S Senior-Pos.

$$\Lambda = \begin{array}{c} T \\ J \\ S \end{array} \begin{array}{ccc} T & J & S \\ \left(\begin{array}{ccc} -\lambda_T & \lambda_T & 0 \\ \lambda_{JT} & -\lambda_J & \lambda_{JS} \\ \lambda_S & 0 & -\lambda_S \end{array} \right) \end{array}.$$

J bleibt in J Pos. mit $\text{Ex}(\lambda_J) = \text{Ex}(\lambda_{JT} + \lambda_{JS})$ -verteilter Verweildauer; dann verlässt er die Position und wird durch Trainee ersetzt mit Wahrscheinlichkeit $q_{JT} = \frac{\lambda_{JT}}{\lambda_J}$, oder er bekommt eine S -Position mit Wahrscheinlichkeit $q_{JS} = \frac{\lambda_{JS}}{\lambda_J}$.

Alternative Beschreibung:

$$\begin{aligned} P(X(t+h) = J \mid X(t) = T) &= \lambda_T h + o(h) \\ P(X(t+h) = T \mid X(t) = J) &= \lambda_{JT} h + o(h) \\ P(X(t+h) = S \mid X(t) = J) &= \lambda_{JS} h + o(h) \\ P(X(t+h) = T \mid X(t) = S) &= \lambda_S h + o(h) \\ P(X(t+h) = i \mid X(t) = i) &= 1 - \lambda_i h + o(h) \quad \text{für } i = T, J, S. \end{aligned}$$

Grenzverteilung: $\pi = (\pi_T, \pi_J, \pi_S)$

$$\begin{aligned} \lambda_T \pi_T &= \lambda_{JT} \pi_J + \lambda_S \pi_S \\ \lambda_J \pi_J &= \lambda_T \pi_T \\ \lambda_S \pi_S &= \lambda_{JS} \pi_J \\ 1 &= \pi_T + \pi_J + \pi_S \end{aligned}$$

Lösung ist

$$\begin{aligned} \pi_T &= \frac{\lambda_S \lambda_J}{N}, \\ \pi_J &= \frac{\lambda_S \lambda_T}{N}, \\ \pi_S &= \frac{\lambda_T \lambda_{JS}}{N}. \end{aligned}$$

mit $N = \lambda_S \lambda_J + \lambda_S \lambda_T + \lambda_T \lambda_{JS}$.**4.4 Zur statistischen Analyse**

Zwei Situationen treten in Anwendungen auf.

1. Vollständige Kenntnis über einen oder mehrere Pfade

Bemerkung: Hier *keine Links- oder Rechtszensierungen* berücksichtigt.

2. Beobachtungen nur zu Zeitpunkten $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, d.h. Pfade *nicht* vollständig beobachtet.

In beiden Situationen: Likelihood-basierte Inferenz für die Strukturparameter $\Lambda = \{\lambda_{ij}\}$ bzw. $Q = \{q_{ij}\}$, $\lambda = \{\lambda_i\}$, bzw. $\Lambda = \Lambda(\theta)$, $Q = Q(\theta)$, $\lambda = \lambda(\theta)$

Situation 1

Die Likelihood wird gemäß Struktursatz 4.5 bestimmt:

$$\begin{aligned}
 P(Y_n = i_n, T_n > t_n \mid Y_{n-1} = i_{n-1}, S_{n-1} = s_{n-1}, \dots, Y_0 = i_0, S_0 = 0) \\
 = q_{i_{n-1}i_n} \cdot \underbrace{e^{-\lambda_{i_{n-1}} t_n}}_{=, \text{Exponential-Survivorfkt. } 1-F(t_n)}
 \end{aligned}$$

Gemeinsame (bedingte) Dichte für Y_n diskret, T_n stetig (bezüglich Produktmaß von λ , mit ν Abzählmaß, λ Lebeguemaß):

$$q_{i_{n-1}i_n} \cdot \lambda_{i_{n-1}} e^{-\lambda_{i_{n-1}} t_n}$$

Damit:

$$\begin{aligned}
 \text{Likelihood } L(\lambda_{ij} \mid i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i_n; t_1, \dots, t_n) & \\
 &= \text{Produkt bedingter Dichten wie im zeitdiskreten Fall} \\
 &= p_{i_0}(0) \cdot \underbrace{q_{i_0 i_1} \cdot \lambda_{i_0}}_{\lambda_{i_0 i_1}} e^{-\lambda_{i_0} t_1} \cdot q_{i_1 i_2} \lambda_{i_1} e^{-\lambda_{i_1} t_2} \cdot \dots \cdot \\
 &\quad q_{i_j i_{j+1}} \lambda_{i_j} e^{-\lambda_{i_j} t_{j+1}} \cdot \dots \cdot q_{i_{n-1} i_n} \lambda_{i_{n-1}} e^{-\lambda_{i_{n-1}} t_n} \\
 &= p_{i_0}(0) \cdot \prod_{i \in S} \exp(-\lambda_i \gamma_i) \cdot \prod_{i, j \in S, i \neq j} (q_{ij} \lambda_i)^{n_{ij}}
 \end{aligned}$$

γ_i gesamte Verweildauer in i , n_{ij} Gesamtzahl der Übergänge $i \rightarrow j$.

Loglikelihood: ($p_{i_0}(0)$ kann ignoriert werden)

$$\begin{aligned}
 l(\lambda_{ij}) &= \sum_{i \in S} -\lambda_i \gamma_i + \sum_{i, j \in S, i \neq j} n_{ij} \log(\lambda_{ij}) \\
 &\stackrel{\lambda_i = \sum_{j \neq i} \lambda_{ij}}{=} \sum_{i, j; i \neq j} (-\lambda_{ij} \gamma_i + n_{ij} \log(\lambda_{ij})) \\
 \frac{\partial l(\lambda_{ij})}{\partial \lambda_{ij}} &= -\gamma_i + \frac{n_{ij}}{\lambda_{ij}} \stackrel{!}{=} 0 \\
 \Rightarrow \hat{\lambda}_{ij} &= \frac{n_{ij}}{\gamma_i} \\
 &= \frac{\text{Anzahl der Übergänge von } i \text{ nach } j}{\text{gesamte Verweildauer in } i}
 \end{aligned}$$

Es gilt: $\hat{\lambda}_{ij}$ ist konsistent für λ_{ij} mit asymptotischer Varianz $\frac{n_{ij}}{\gamma_i^2}$.

Korollar:

Sei $n_i = \sum_j n_{ij}$ die Anzahl der Sprünge weg von i . Dann ist $\hat{\lambda}_i = \frac{n_i}{\gamma_i}$ und $\hat{q}_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_i}$.

Beweis:

Invarianz des ML-Schätzers bzgl. Reparametrisierung; hier $\lambda_i = \sum_{j \neq i} \lambda_{ij}$

$$\Rightarrow \hat{\lambda}_i = \sum_{j \neq i} \hat{\lambda}_{ij} = \sum_{j \neq i} \frac{n_{ij}}{\gamma_i} = \frac{n_i}{\gamma_i}.$$

Schließlich folgt für ÜW der eingebetteten MK Y :

$$\hat{q}_{ij} = \frac{\hat{\lambda}_{ij}}{\hat{\lambda}_i} = \frac{n_{ij}/\gamma_i}{n_i/\gamma_i} = \frac{n_{ij}}{n_i}$$

□

Beispiel: (aus Guttorp) Pavian Stamm im Amboseli NP, Kenya

Veränderung der Mitgliederanzahl durch Geburt (B), Einwanderung (I), Auswanderung (E), Tod (D).
Annahme eines Geburts-Tod-Prozesses. Tabelle 1-4.

Tabelle 1: Ereignisse im Pavian Stamm

nach so vielen Tagen	Anzahl	Ereignis
41	40	B
5	41	B
22	42	B
2	43	D
17	42	D
26	41	I
0	42	I
55	43	B
35	44	I
20	45	E
5	44	D
6	43	E
32	42	D
4	41	D
0	40	D
22	39	D
10	38	B
0	39	B
7	40	D
4	39	B
17	40	D
11	39	E
3	38	B
4	39	D
8	38	D
2	37	D
5	36	B
10	37	B

Tabelle 2

i, j	n_{ij}	$\hat{\lambda}_{ij}$	i, j	n_{ij}	$\hat{\lambda}_{ij}$
36, 37		$\frac{1}{5} = 0.2$	37, 36		$\frac{1}{12}$
37, 38		$\frac{1}{12}$	38, 37		$\frac{1}{21}$
38, 39		$\frac{2}{21}$	39, 38		$\frac{3}{41}$
39, 40		$\frac{2}{41}$	40, 39		$\frac{3}{65}$
40, 41		$\frac{1}{65}$	41, 40		$\frac{1}{35}$
41, 42		$\frac{2}{35}$	42, 41		$\frac{2}{71}$
42, 43		$\frac{2}{71}$	43, 42		$\frac{2}{63}$
43, 44		$\frac{1}{63}$	44, 43		$\frac{1}{40}$
44, 45		$\frac{1}{40}$	45, 44		$\frac{1}{20}$

Tabelle 3: γ_i

$\gamma_{36} =$	5	= 5
$\gamma_{37} =$	2+10	= 12
$\gamma_{38} =$	10+3+8	= 21
$\gamma_{39} =$	22+0+4+11+4	= 41
$\gamma_{40} =$	41+0+7+17	= 65
$\gamma_{41} =$	5+26+4	= 35
$\gamma_{42} =$	22+17+0+32	= 71
$\gamma_{43} =$	2+55+6	= 63
$\gamma_{44} =$	35+5	= 40
$\gamma_{45} =$	20	= 20

Tabelle 4: $\hat{\lambda}_i$

$\hat{\lambda}_{36} =$	$\frac{1}{5}$	= 0.2
$\hat{\lambda}_{37} =$	$\frac{2}{12}$	= 0.17
$\hat{\lambda}_{38} =$	$\frac{3}{21}$	= 0.14
$\hat{\lambda}_{39} =$	$\frac{5}{41}$	= 0.12
$\hat{\lambda}_{40} =$	$\frac{4}{65}$	= 0.06
$\hat{\lambda}_{41} =$	$\frac{3}{35}$	= 0.09
$\hat{\lambda}_{42} =$	$\frac{4}{71}$	= 0.06
$\hat{\lambda}_{43} =$	$\frac{3}{63}$	= 0.03
$\hat{\lambda}_{44} =$	$\frac{2}{40}$	= 0.025
$\hat{\lambda}_{45} =$	$\frac{1}{20}$	= 0.05

Situation 2

Daten $X(t_1) = i_1, \dots, X(t_n) = i_n$

\Rightarrow Likelihood

$$L(\lambda_{ij} \mid X(t_1) = i_1, \dots, X(t_n) = i_n) = p_{i_0}(0)p_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \cdot \dots \cdot p_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1})$$

Die ÜW auf der rechten Seite müssen dabei aus den Kolmogorov-Gleichungen bzw. über die Spektralzerlegung von Λ bestimmt werden \Rightarrow numerisch aufwendig.

Also: Falls möglich, dieses Studiendesign vermeiden; gesamten Pfadverlauf retrospektiv erfragen. Dies ist allerdings in Beobachtungsstudien nicht immer möglich.