Vorlesung: Lineare Modelle

Prof. Dr. Helmut Küchenhoff

Institut für Statistik, LMU München

SoSe 2015

LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN | Institut für Statistik | STABLAB Statistisches Beratungs Labor

Darstellung

$$Y_i = \underbrace{\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots \beta_p x_{ip}}_{x_i'\beta} + \varepsilon_i; \quad i = 1, \ldots n$$

$$x_i' = (1, x_{i1}, \ldots, x_{ip})$$

$$Y = X\beta + \varepsilon \tag{2.1}$$

mit

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix} \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

Modellannahmen

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_i) &= 0 \\ E(\varepsilon) &= \mathbf{0} && (2.2) \\ V(\varepsilon_i) &= \sigma^2 && (2.3) \\ \{\varepsilon_i \mid i = 1, \ldots, n\} &\text{ unabh.} && (2.4) \\ \text{Aus (2.3), (2.4) folgt: } V(\varepsilon) &= \sigma^2 I \\ \varepsilon_i &\sim N(0, \sigma^2) \text{ und (2.4)} \\ \varepsilon &\sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 I) && (2.5) \end{aligned}$$

Y: Zufallsvektor der Zielgröße
X: feste Design-Matrix (Matrix der Einflussgrößen)
β: Vektor der Regressionsparameter
ε: Störgrößen

Interpretation des Modells

- Lineare Abhängigkeit von den Einflussgrößen
- Steigt x_k um eine Einheit, so steigt Y im Erwartungswert um β_k Einheiten, wenn alle anderen **X-Variablen festgehalten werden**
- Linearer Zusammenhang bei Festhalten der übrigen Variablen
- β_k charakterisiert den Einfluss von x_k unter Berücksichtigung der übrigen Variablen („Confounder-Korrektur“)

KQ-Schätzer

Wir betrachten Modell (2.1). Dann heißt

$$\hat{\beta} = \arg\min_{\beta} \underbrace{(Y - X\beta)'(Y - X\beta)}_{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - x_i'\beta)^2} \tag{2.6}$$

KQ-Schätzer.

$$\hat{\varepsilon}_i := Y_i - x_i'\hat{\beta} \tag{2.7}$$

Es gilt für $(X'X)$ invertierbar: $\hat{\beta}$ **existiert**, ist **eindeutig** und

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y. \tag{2.8}$$

Der KQ-Schätzer erfüllt die Normalgleichungen:

$$X'\hat{\varepsilon} = \mathbf{0} \tag{2.9}$$

Produktsummenmatrix

Die Matrix $X'X$ heißt Produktsummenmatrix.

Es gilt:

$$X'X = \begin{pmatrix} n & \sum x_{i1} & \cdots & \sum x_{ip} \\ \sum x_{i1} & \sum x_{i1}^2 & \cdots & \sum x_{i1}x_{ip} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum x_{ip} & \cdots & \cdots & \sum x_{ip}^2 \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

Eigenschaften des KQ-Schätzers

Sei das Modell (2.1) mit (2.2) gegeben.

1. Der KQ-Schätzer ist **erwartungstreu:**

$$E(\hat{\beta}) = \beta \tag{2.11}$$

2. Für die Varianz-Kovarianz-Matrix von $\hat{\beta}$ gilt unter (2.3) und (2.4):

$$V(\hat{\beta}) = \sigma^2(X'X)^{-1} \tag{2.12}$$

3. Unter (2.5) gilt:

$$\hat{\beta} \sim N\left(\beta,\ \sigma^2(X'X)^{-1}\right) \tag{2.13}$$

Hat-Matrix und Residualmatrix

Sei das Modell (2.1) mit einer Designmatrix X mit $rg(X) = p + 1$ gegeben. Es gilt

$$\hat{Y} = \underbrace{X(X'X)^{-1}X'Y}_{\hat{\beta}} \quad (2.14)$$

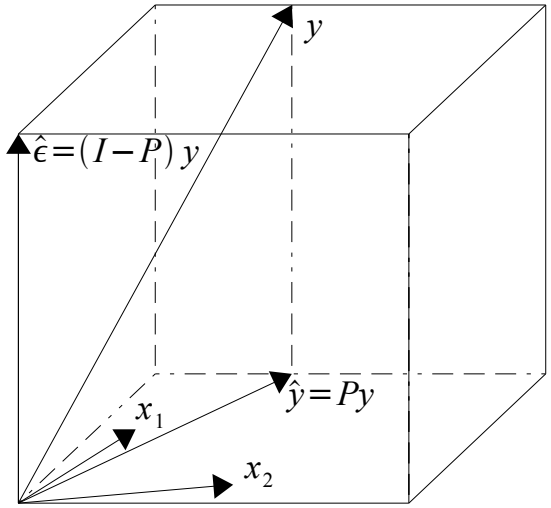
$$P := \underbrace{X(X'X)^{-1}X'}_{n \times n} \quad (2.15)$$

$$\hat{\varepsilon} = Y - \hat{Y} = \underbrace{(I - P)}_{Q} Y \quad (2.16)$$

$$Q := I - P \quad (2.17)$$

Geometrische Interpretation

Wir betrachten den Vektorraum $\Re^n$. Die Beobachtungen Y und x sind Vektoren. Die KQ - Schätzung ist eine orthogonale Projektion auf den von den x- Vektoren aufgespannten Unterraum:



Eigenschaften von P und Q

P heißt **Hat-Matrix** ($\hat{Y} = PY$), Q **Residualmatrix**. P und Q sind Projektionsmatrizen, und zueinander orthogonal:

$$P' = P, \; P^2 = P \quad (2.18)$$

$$Q' = Q, \; Q^2 = Q \quad (2.19)$$

$$PQ = QP = \mathbf{0} \quad (2.20)$$

Bemerkungen

- Beweis durch Nachrechnen (benutze $(AB)' = B'A'$)
- Bedeutung von $P^2 = P$:
  zweimaliges Anwenden der Regression führt zum gleichen Ergebnis
- Bedeutung von $PQ = 0$:
  Regression von Residuen liefert $\hat{y} = 0$

Für die Varianz-Kovarianz-Matrizen von $\hat{Y}$ bzw. $\hat{\varepsilon}$ gilt:

$$V(\hat{Y}) = \sigma^2 P \quad (2.21)$$

$$V(\hat{\varepsilon}) = \sigma^2 Q \quad (2.22)$$

$$\text{da } \hat{\varepsilon} = Q\varepsilon \quad (2.23)$$

Erwartungstreue Schätzung von σ^2

Gegeben sei das Modell (2.1) mit (2.2) bis (2.4).

Dann ist:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-(p+1)}\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon} = \frac{1}{n-(p+1)}\sum \hat{\varepsilon}_i^2 \qquad (2.24)$$

ein erwartungstreuer Schätzer für σ^2.

Beweis

$$\begin{aligned} E(\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}') &= E(\varepsilon' Q' Q \varepsilon) = E\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} E(\varepsilon_i^2) q_{ii} + 0 = \sigma^2 * sp(Q) \\ &= \sigma^2 * (n - sp(P)) = \sigma^2 * (n-(p+1)) \end{aligned}$$

$$sp(P) = sp(X(X'X)^{-1}X') = sp((X'X)^{-1}X'X) = sp(I_{p+1})$$

Bemerkung:
Für Projektionsmatrizen gilt allgemein: $Sp(P) = rg(P)$

Beispiel: Volumen von Hühnereiern

V : Volumen
d : Durchmesser
r : Radius